目　　录

导　论

长期以来，分析中的基函数是余弦函数、正弦函数和虚指数函数. 函数$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}$($k\in\mathbb{Z}$)构成了空间$L^2[0,2\pi]$的一组正交基(指规范正交，下同). Fourier 级数是它们的线性组合$\sum a_k e^{ikx}$. 对它们的研究一直是并且仍然是数学分析中问题和发现的用之不尽的源泉. 之所以问题多，这主要是因为缺乏一本好的字典，用它可以把函数的性质翻译到它的 Fourier 系数上. 这里有一个例子说明这个困难. J. P. Kahane，Y. Katznelson 和 K. de Leeuw 已经证明了(〔150〕)：从任一个平方可和函数$f(x)$出发，为了得到一个连续函数$g(x)$，只需或者增大$f(x)$的 Fourier 系数的模，或者保持它不变并适当地改变系数的位相. 因此不可能仅根据 Fourier 系数大小的阶就预知函数的性质(大小，正则性). 更清楚地认识这些仍然是困难的，许多问题还有待解决.

在 80 年代初，一些科学家就使用了“小波”作为传统 Fourier 分析的一个替代物. 用这个替代物可以期待把数值分析做得更简单，并把某些瞬时现象的综合做得更有力. J. S. Lienard 和 X. Rodet(〔167〕,〔206〕) 涉及到声学信号(语言和音乐)的数值处理，J. Morlet 的小波(〔124〕)则是用来贮存和表示在石油勘测中收集到的地震信号. 从数学方面来说，探索也在积极地进行. 为说明问题，我们只要提到 R. Coifman 和 G. Weiss 创立“原子”和“分子”学说就够了. 这些“原子”和“分子”构成了不同函数空间的基的组成部分. 它们是很明确地被确定的，对使用者来说，又是很简单的. 某些原子分解可以通过对 A. Calderon 的一个著名恒等式的离散化来得到. 而在这个恒等式中，“小波”已经是被隐蔽地勾划出来了. 这个恒等式后来又被 Morlet 和他的合作者们重新发现……. 最

后，L. Carleson 使用了非常像“小波”的函数构造了 Stein 和 Weiss 的空间 H^1 的无条件基.

这些不同的工作显示了某种“和谐性”；由此可以看出，应该而且可以用数学上有根据的、又是普遍适用的、有内在联系的理论把它们统一起来. 本书将要研究的**小波正交基**就取代了 Lienard，Morlet 和 Rodet 的经验“小波”.

正是这些小波正交基给出了 Coifman 和 Weiss 所发现的“原子分解”的一个直接方法，小波正交基也首次构造出了通常函数空间的**无条件基**. 小波基是普遍适用的；一切准备就绪，“伸手可得”，这就是说：函数或分布是小波级数的和，与用 Fourier 级数来做这件事的情形不同，这些级数的系数以简单的方式精确并忠实地表达了这些函数或分布的性质.

这样，人们就有了一个新的工具，用它可以得到以前只有用缺项的或随机的 Fourier 级数才能办到的微妙的结构. 这些特殊级数的例外好的性质现在变成了一般小波级数的平凡性质.

正交小波级数的分析或综合方法将在科学和技术的不同领域中起着重要作用. 本书第 1 卷(第 1 章到第 6 章)是为所有想了解小波的读者——数学家、物理学家和工程师们而写的.

本书的第 2 卷和第 3 卷是特意为数学家们写的，它们讨论与小波有关的算子. G. Weiss 曾指出：当一个空间可以作“原子分解”时，对作用到这个空间上的算子的研究就变得很简单了. 他写道：“分析中的许多问题可自然地表述为定义在函数或分布空间上的线性算子的连续性问题. 如果这个问题可以首先化为研究算子作用到适当的一类简单的元上，而这些元又以某种方便的形式生成整个空间的话，那么这些问题就可以用很直接而容易的技术来解决”. 当这些“简单的元”是三角函数 e^{ikx} 时，在 L^2 上有界的，并且在这个三角函数系下是对角线化的算子，一般地说，除了由定义所保证的平移不变性外，没有任何令人感兴趣的性质. 因此重要的是对算子 T 的特征值施加足够精确的条件，以保证可以延拓这个算子

到其它函数空间上去.这个方向上的第一个结果是由 Marcinkiewicz 得到的.

但是,在小波基上精确对角线形的算子或近似对角线化的算子构成了 L^2 上有界算子的一个代数 A,用著名的 **Calderon** 和 **Zygmund** 的**实变方法**可以把 A 中的算子延拓到其它函数空间上去.这个代数 A 在很自然的意义上延拓了伪微分算子,并且它是严格地包含在 A. Calderon 已研究过的算子集合 C 中. A. Calderon 的研究工作导致了复分析和偏微分方程中若干问题的解决.

这里对集合 C 作一点更精细的说明.它的微妙结构寓于我们称之为"Calderon 计划"之中.在与 Zygmund 合作发现了那些可以归之于经典伪微分算子演算的东西之后,A. Calderon 自己打算尽可能减弱为有效地使用这个算法所必要的正则性条件,以系统地扩展应用领域.

在最少正则性条件的研究中,Calderon 奠基性的并且是令人出乎意料的发现是:存在着一个界限.存在一个人们不能超越的"自然边界".在这个范围之内,算子的延拓不过是某个 Banach 空间上全纯函数的解析延拓.我们将在第 8 章证明它.

本书第 7 章到第 11 章研究 Calderon 计划中算子集合 C 的构造.我们把它叫做 **Calderon-Zygmund 算子**.虽然它很不同于 Calderon 和 Zygmund 在 50～60 年代曾研究过的"历史上的算子".

完全同这些"历史上的算子"一样,我们将要讨论的算子在某种新的意义上可以借助于奇异积分来定义.我们将在第 7 章仔细讨论它.为了不仅限于考虑卷积算子的情形,必须给出 L^2 连续性的判别准则.缺了它,这个理论就会象沙滩上的城堡一样倒塌下来.这个判别准则之一就是 David 和 Journé 的重要的 $T(1)$ 定理.我们将在第 8 章证明它. $T(1)$ 定理代替了 Fourier 变换,而使用 Fourier 变换本质上只限于卷积算子.

尽管 $T(1)$ 定理是充分必要条件,然而不幸的是它还不能直

接用到最令人感兴趣的 Calderon 计划里的集合 C 中的算子上去. 我们不知道这是为什么. 然而这些算子具有很特殊的非线性结构, 正确地了解非线性,我们就可以从借助于 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理而得到的“局部性”结果过渡到有效地执行 Calderon 计划所要求的“整体性”定理.

在本书的第 3 卷及第 2 卷的第 9 章,我们将介绍 Calderon 计划的最优美的应用. 首先是 Calderon 的著名的精确伪微分演算, 它现在对非线性偏微分方程有着很有意义的应用.

然后我们回到复平面上与 Lipschitz 域有关的 Hardy 空间和复分析的讨论. 第 7 章的课题是研究可求长曲线上的 Cauchy 算子. 接下来讨论 Kato 问题,即确定增殖的二阶微分算子的平方根算子的定义域.

往后我们介绍 B. Dahlberg, D. Jerison, C. Kenig 和 G. Verchota 关于 Lipschitz 域上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题.

最后,本书以简短介绍 J. M. Bony 的仿微分算子而结束. 仿微分算子可用于分析非线性偏微分方程.

小波以突然的方式作为某个伪微分算子的特征值再次出现. 经过正确地改写,它又出现在 Lipschitz 曲线上 Hardy 空间和 Cauchy 算子的研究中. 这个算子在为这种曲线上的复分析而构造的一组特殊的小波基下是“几乎对角线化的”(第 11 章). 为适应各种几何情形而构造小波基是足够灵活的. 实际上,不存在一种可以用来分析所有 Calderon 的 C 集合的算子的普遍适用的基.

J. O. Strömberg 是对任意整数 m 构造出 $L^2(\mathbb{R})$ 的形如 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)(j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z})$ 的一组正交基的第一个人. 这里函数 $\psi(x)$ 属于 C^m,并且它在无穷远处是指数下降的.

以后的关于小波正交基的工作没有走 Strömberg 的路,它本质上属于 I. Daubechies, P. G. Lemarié, S. Mallat 和作者本人这些工作已仔细地给出了完整的证明.

至于算子,Calderon, Zygmund 和 Cotlar 的重要结果将在第 7

章中用由集合 C 所构造的一种新的方式来讲述.

读者在阅读本书后半部分时,经常遇到的是下列各位的名字: J. M. Bony, G. David, P. Jones, J. L. Journé, C. Kenig, T. Murai 和 S. Semmes.

本书分为三卷是为使它适应各类读者. 如我已经指出的,人们可以仅读第 1 卷,它是关于小波实际知识的要点. 然而读者亦可直接进入第 2 卷(Calderon-Zygmund 算子)而仅仅从前六章各章的引言中去认识小波. 最后,读者可以毫不犹豫地进入第 3 卷的第 12 章、第 13 章、第 14 章和第 15 章,因为它们中的每一章都是独立的、结构紧密的课题(复分析、Banach 空间上全纯泛函、Kato 理论、Lipschitz 域上椭圆偏微分方程、以及非线性偏微分方程). 而联系这些不同课题的线索则显然是小波在 Calderon 计划中的算子理论的运用.

本书的水平适用于法国攻读第三阶段博士第一年的学生. 我们已在法国和美国各类工程师和数学家中试用过它. 本书作为讲义不要求预先学过 E. M. Stein 的〔217〕以及 E. M. Stein 和 G. Weiss 合著的〔221〕这些名著,也不要求学过 Carcia Cuerva 和 Rubio de Francia 的书〔115〕,但请不要忘记 Zygmund 写的基本参考书〔239〕.

R. Coifman 曾帮助我认识到 Calderon 计划的重要性. 自从 1974 夏,我们一直合作致力于实现这个计划. 本书是我们计划的一部分. 如果说本著作与它一开始的样子相比变化颇多的话,这完全要归功于我们的真诚与热忱的相互交流,归功于年轻的探索者们对问题给出了比我们的预想漂亮得多的解答.

第 7 章　新 Calderon-Zygmund 算子

1. 引　言

本章研究的 Calderon-Zygmund 算子十分不同于 Calderon 和 Zygmund 30 多年前所讨论的那些算子. 我们试图叙述和解释这些变革.

Calderon-Zygmund 算子理论诞生于 50 年代，斯时 Calderon 和 Zygmund 系统地研究出现在椭圆型偏微分方程中的卷积算子.

最著名的例子是 Riesz 变换 $R_j=-i\,\partial/\partial x_j(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$，这里 $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n^2$，$1\leqslant j\leqslant n$. 当研究上半平面的 Neumann 问题时，就会涉及到 Riesz 变换. 更精确地说，设 $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$是由 $t>0$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$定义的开集. 考虑在 Ω 内的调和函数 $u(x,t)$，即它满足 $\Delta u+\partial^2u/\partial t^2=0$ 并且属于 Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$. 于是 $u(x,t)$ 和 $u(x,t)$的梯度在 $t=0$(它是 Ω 的边界 $\partial\Omega$)上的迹有意义. 与此相应，Riesz 变换 R_j, $1\leqslant j\leqslant n$，允许从法向导数的迹 $-\frac{\partial u}{\partial t}u(x,t)|_{t=0}$过渡到各切向导数的迹 $\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)|_{t=0}$.

Riesz 算子在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的连续性可直接证得. 为此或用 Green 公式，或通过 Fourier 变换把 R_j与某个运算对应. 在第二种情形，我们有 $\mathscr{F}R_jf(\xi)=\xi_j|\xi|^{-1}\hat{f}(\xi)$，注意到 $|\xi_j|\leqslant|\xi|$ 即得 $\|R_jf\|_2\leqslant\|f\|_2$，或更精确地，我们有 $\sum_1^n\|R_j(f)\|_2^2=\|f\|_2^2$.

反之，对 $1\leqslant j\leqslant n$，R_j 在空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 上的连续性却丝毫不是显然的. 这要由 Calderon 和 Zygmund 的实变方法得

到，这正是我们将要讲述的.

Calderon 和 Zygmund 更一般地考虑由下列算法在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上定义的算子. 出发点是一个零阶齐次的属于 $C(\mathbb{R}^n/\{0\})$并且满足 $\int_{S^{n-1}}\Omega(x)d\sigma(x) = 0$ 的函数 $\Omega(x)$，这里 $d\sigma$ 是 S^{n-1}上旋转不变的概率测度.

第一代 Calderon-Zygmund 算子是卷积算子. 首先由

$$\langle S,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\Omega(x)|x|^{-n}\varphi(x)dx,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

定义分布 $S=\text{v. p}\ \Omega(x)\ |x|^{-n}$. 再由 $T(f)=S*f$ 给出 Calderon-Zygmund 算子 T. 换言之，

$$T(f) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}f(x-y)\frac{\Omega(y)}{|y|^n}dy. \tag{1.1}$$

若 f 按指数 $\gamma>0$ Hölder 连续且平方可积，上述极限存在.

进而有 $\mathscr{F}S=m(\xi)$，这里 $m(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$，$m(\lambda\xi)=m(\xi)$，$\lambda>0$，并且 $m(\xi)$ 在单位球面上的均值为零. Riesz 变换的情形相应于 $m(\xi)=\xi_j/|\xi|$.

这个理论使人得以统一 Marcinkiewicz (1938) 和 G. Giraud (1936) 的早先的工作. Calderon 和 Zygmund 证明了 Marcinkiewicz 的相应于椭圆型偏微分方程的乘子正是 G. Giraud 所用的(周期化了的)分布 v. p. $\Omega(x)|x|^{-n}$的 Fourier 系数. 这一统一以(L. Schwartz 于 1943 年至 1945 年间引入的)缓增分布的 Fourier 变换的概念为前提.

Calderon 和 Zygmund 发现了两个 Calderon-Zygmund 算子 T_1 和 T_2复合的十分自然的规则. 为做复合，只须进行 $m_1(\xi)$ 和 $m_2(\xi)$的通常乘法.

象征 $m_3(\xi)=m_1(\xi)m_2(\xi)$不总是在单位球面上有积分零，即使所考虑的算子代数是族 $cI+T$，其中 C 是一个常数，而 T 是由(1.1)定义的算子.

Calderon 和 Zygmund 进而要把 Calderon-Zygmund 算子 T

的连续性这个性质推广到 $L^p(\mathbb{R}^n)$，$1<p<\infty$. 由 Littlewood 和 Paley 引进而由 Marcinkiewicz 使用的证明他的乘子定理的复变方法不能推广到 n 维情形，正是这一障碍最终导致 Calderon 和 Zygmund 创造了实变方法. 它的本质要素是 Calderon-Zygmund 分解，这种分解允许对于一个给定的水平 $\lambda>0$，把 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的任意函数 f 写成 $g+h$，g 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，且满足 $\|g\|_2\leqslant C\sqrt{\lambda}$，而 h 是一个振动项级数之和，每项的支集含于某个方体 Q_j；最后 Q_j 的测度的和不超过 C/λ. 这些振动项预示着 Coifman 和 Weiss 的"原子"以及小波.

对于一个算子 T 的 L^2 估计，结合有关 T 的分布核 $K(x,y)$ 的相当弱的假设(例如，$\int_{|x-y|\geqslant 2|y'-y|}|K(x,y')-K(x,y)|dx\leqslant C$ 即已足够)，就提供了 L^1、弱 L^1 估计. 对此，本章将予以阐明. 通过内插，从这一估计和 L^2 估计就得到 $1<p<2$ 时的 L^p 估计，再通过对偶，就得到 $2\leqslant q<\infty$ 时的 L^q 估计，只要交换 $K(x,y)$ 中 x,y 的地位，对 $K(y,x)$ 作了相应的假设.

Calderon 和 Zygmund 关注的另一问题是当 f 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的任一函数时，给(1.1)以逐点的意义，即要证明对于几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 下列极限存在

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon} f(x-y)\Omega(y)|y|^{-n}dy.$$

这个问题导致形成极大算子 T^*，其定义是

$$T^*f(x)\doteq\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|y|\geqslant\varepsilon} f(x-y)\frac{\Omega(y)}{|y|^n}dy\right|, \qquad (1.2)$$

并证明极大不等式

$$\|T^*f\|_2\leqslant C\|f\|_2, f\in L^2(\mathbb{R}^n). \qquad (1.3)$$

我们方才介绍的卷积算子仅出现在常系数的椭圆问题中，为处理十分正则的变系数偏微分方程，Calderon 和 Zygmund 创立了我们所说的"第二代" Calderon-Zygmund 算子.

第二代 Calderon-Zygmund 算子不再是卷积算子，而由稍许修

改了的分布核给出.精确地说,若 f 是一个(充分正则并且平方可积的)检验函数,我们有

$$Tf(x) = \text{v.p.}\int K(x,y)f(y)dy = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} K(x,y)f(y)dy, \tag{1.4}$$

其中 $K(x,y)$ 具有下列性质:

$$K(x,y) = L(x,x-y), \tag{1.5}$$

$$L(x,\lambda u) = \lambda^{-n}L(x,u),\ \text{对所有}\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\ \text{和所有}\ \lambda>0, \tag{1.6}$$

$$|\partial_u^\alpha\partial_x^\beta L(x,u)| \leqslant C,\ \text{当}\ |u|=1, |\alpha|\leqslant N\ \text{且}\ |\beta|\leqslant m, \tag{1.7}$$

$$\int_{S^{n-1}} L(x,u)d\sigma(u) = 0,\ \text{对任意}\ x\in\mathbb{R}^n\ . \tag{1.8}$$

利用分离变量法(展成变量 $u\in S^{n-1}$的球面调和函数级数),当 N 比之 n 充分大时,Calderon 和 Zygmund 把第二代算子归结为标准收敛级数 $\sum_0^\infty M_jT_j$,其中 T_j是第一代算子,而 M_j是和有界函数逐点相乘的算子.当限于研究第二代算子的 L^2或 L^p连续性时,整数 m 不起任何作用,甚至可以是零.

反之,当研究有关算子的复合以求得到一个赋予精确象征算法的代数时,m 将起本质性作用.为方便计,模掉 1 阶正则化算子构成的理想 $\mathscr{I}$ 来进行推理,所谓 1 阶正则化算子是指算子 S 以及 $\partial/\partial x_jS$, $S\partial/\partial x_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界. Calderon 和 Zygmund 证明了,以 $\mathscr{I}$ 为模,第二代 Calderon-Zygmund 算子组成一个交换代数,只要 m 和 N 充分大.这个代数中还应包含跟 $b(x)$逐点相乘的算子,$b(x)$及其所有导数有界.

若干年后(1965),A. P. Calderon 重提象征演算问题,旨在寻找相应于算子 T_1和 T_2的核 $L_1(x,u)$ 和 $L_2(x,u)$关于 x 的正则性的最少条件,这些条件保证以 1 阶正则化算子为模的象征演算的存在性.在对于偏微分方程的应用中,关于 x 的正则性由所研究的微分算子 $\sum c_\alpha(x)\partial^\alpha$的系数 $c_\alpha(x)$ 的正则性决定,而问题中的核

关于变量 $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 是无穷次可微的.

方才提出的象征演算问题可归结为交换子 $[A,T]$的研究,这里 A 是和一个函数 $a(x)$逐点相乘的乘法算子,$a(x)$的正则性由出现在(1.7)中的整数 m 估量,而 $T=\partial/\partial x_1 T_1+\cdots+\partial/\partial x_n T_n$,诸 T_j是第一代 Calderon-Zygmund 算子.

在一维情形,T_1用 Hilbert 变换 H 代替,而 T 由"Calderon 算子" $\Lambda=DH$ 代替,这里 $D=-i\dfrac{d}{dx}$.

在 1965 年,Calderon 证明了交换子 $[A,\Lambda]$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界,当且仅当 $a(x)$是 Lipschitz 函数,即存在一个常数 C,使对所有 x 和 y 有 $|a(x)-a(y)|\leqslant C|x-y|$. 条件的必要性容易验证. 反向的蕴含是深刻的,Calderon 的证明基于他利用 Lusin 面积函数的可积性对全纯空间$\mathbb{H}^1$建立的特征刻画上. 这一特征刻画开辟了空间$\mathbb{H}^1$ 上的算子及类似于 $\mathbb{H}^1$的实空间的对偶空间的研究道路([109]).

为了过渡到 n 维,Calderon 利用(几年前由 Calderon 和 Zygmund 发现的)旋转法,并且证明当 $m=1$ 和 N 充分大时(1.4)定义的算子族变成一个交换 Banach 代数(模 1 阶正则化算子).

这个引人注目的定理将在第 9 章证明,它可以改进人们利用古典微分演算(其中象征 $\sigma(x,\xi)$关于 x 无穷次可微)获得的大部分结果.

交换子$[A,\Lambda]$的 L^2 连续性到 $L^p(1<p<\infty)$ 连续性的过渡则采用 Riesz 变换情形所用的证明.

自 1966 年以来,Calderon 着手研究高阶交换子 $T_k=[A,[A,\cdots,[A,D^kH]\cdots]]$,并证明诸 T_k在 $L^2(\mathbb{R})$上连续,只要 A 是一个与 Lipschitz 函数 $a(x)$ 逐点相乘的算子. 母级数 $\sum_0^\infty \zeta^k T_k$是由 Cauchy 积分定义的算子 v. p. $\int_\Gamma (z-w)^{-1}f(w)dw$, 其中 Γ 是一个 Lipschitz 图象,而 f 属于 $L^2(\Gamma,ds)$. A. Calderon 提出后一算子

在 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma;ds)$上的连续性问题.

纳入"Calderon 计划"的另一算子联系着在一个 Lipschitz 开集上用双层位势法解 Dirichlet 或 Neumann 问题这一经典课题.

所说的算子在局部坐标系内由下式给出

$$Tf(x)=\frac{1}{\omega_n}\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)dy,$$

其中

$$K(x,y)=(a(x)-a(y)-(x-y)\cdot\nabla a(y))(|x-y|^2+(a(x)-a(y))^2)^{-(n+1)/2},$$

而 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Lipschitz 区域(局部地)由 $t>a(x),x\in\mathbb{R}^n,t\in\mathbb{R}$ 定义,而 $a(x)$ 是 Lipschitz 函数.

若 $n=1$,这个核正是 Cauchy 核的实部,而在 n 维情形,一旦知道了 Cauchy 核在 $L^2(\mathbb{R})$上的有界性,便可用旋转法研究它.

在 1977 年,Calderon 证明了对于所有 Lipschitz 图象 $y=a(x)$ 由 Cauchy 积分定义的算子的连续性,只要 $\|a'\|_\infty<\varepsilon$;所用的方法不能计算这个神秘常数 ε.

第三代 Calderon-Zygmund 算子推广了方才叙述的例子. 1976 年,A. Calderon 提出下列问题,设 $K(x,y)$ 是对 $y\neq x$ 定义的两个实变量的函数,它满足 $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-1}$和 $|\partial/\partial xK(x,y)|\leqslant C_1|x-y|^{-2}$这两个估计以及条件 $K(y,x)=-K(x,y)$. 分布核为 v. p. $K(x,y)$的算子 $T:\mathscr{D}'\to\mathscr{D}'$能否扩张为 $L^2(\mathbb{R})$上的一个连续算子? 这类结果将"无偿"提供所有 Lipschitz 曲线上 Cauchy 核的连续性等结果. 可惜有关算子扩张的命题并不成立. J. L. Journé 在 1982 年发现应当再附加假设 $T(1)$ 属于 BMO. 这后一条件对于 T 的 L^2连续性将是必要且充分的. 为了定义 $T(1)$,用 $g_\varepsilon(x)$表示 Gauss 函数 exp $(-\varepsilon x^2)$ 并证明存在标准化常数 $C(\varepsilon)$ 使在分布意义下 $T(g_\varepsilon)-c(\varepsilon)$收敛到一个分布,我们记之为 $T(1)$;这个分布仅在以常数为模的意义下是确定的,毕竟对于函数空间 BMO 也不过如此.

“$T(1)$定理”最终由 G. David 和 J. L. Journé 在 1983 年证明，这是一个值得重视的结果，因为它把由 A. Calderon，R. R. Coifman 和本书作者所得的所有结果都化归为简单的分部积分. 特别地，它直接提供了小斜率 Lipschitz 曲线上 Cauchy 核的连续性.

到一般 Lipschitz 曲线的过渡由新的实变方法实现，这种方法由 G. David 发现，并被 T. Murai 简化.

为了定义“第三代 Calderon-Zygmund”算子，我们以 $\mathbb{R}^n$代替 $\mathbb{R}$ 并摆脱反对称性假设 $K(y,x)=-K(x,y)$. 这时仅仅知道了 $K(x,y)$（它在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta$ 上定义，Δ 是对角面）还不能定义算子 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$.

我们沿相反的方向进行，而从一个线性（连续）算子 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 出发. 我们说 T 相应于一个奇异积分，如果 T 的分布核限制在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta$ 上是一个函数 $K(x,y)$，它满足

$$|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n}, \tag{1.9}$$

$$|\partial/\partial x_j K(x,y)|\leqslant C_1|x-y|^{-n-1}, 1\leqslant j\leqslant n, \tag{1.10}$$

$$|\partial/\partial y_j K(x,y)|\leqslant C_1|x-y|^{-n-1}, 1\leqslant j\leqslant n. \tag{1.11}$$

换言之，若 f 是一个检验函数，x 不属于 f 的（紧）支集，那么

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)dy. \tag{1.12}$$

基本问题（将在第 8 章解决）是找到蕴含 T 在参照空间 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续性的必要且充分的条件. 我们将说 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子. 我们将证明存在$\mathbb{R}^n$上的一个有界可测函数 $m(x)$和一个可测函数序列 ε_j，其值 $\varepsilon_j(x)>0$，使对所有属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数 f 和几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$有

$$Tf(x)=m(x)f(x)+\lim_{j\uparrow\infty}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon_j(x)}K(x,y)f(y)dy. \tag{1.13}$$

在卷积算子的情形，ϵ_j不依赖于 x；另外，若 ϵ_j可以是趋于 0 的任意序列，就有回到了奇异积分主值的古典概念. 表达式 (1.13) 显示了在什么意义下 T"相应于一个奇异积分".

除已列举的例子（Calderon 交换子，Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分或双层位势）之外，第三代 Calderon-Zygmund 算子还出现在一个迥然不同的背景中. 为了证明由第 3 章的算法产生的一个小波基 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，是某个古典函数空间 B 的一个无条件基，方便的步骤是证明在我们的小波基中的对角算子 $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 在函数空间 B 上同样也是连续的，而这类算子自动的是 Calderon-Zygmund 算子，它在 B 上的连续性可用本章和第 10 章中发展的实变方法来建立.

2. 相应于奇异积分的 Calderon-Zygmund 算子的定义

正如引言中所申明的，我们无意把 Calderon-Zygmund 算子定义为奇异积分的主值.

更精确地说，有可能使用这样的核 $K(x,y)$，对它来说，极限 $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} K(x,y) f(y) dy$ 在通常意义下不存在，即使 $f(y)$ 是一个检验函数，并且 $K(x,y)$ 是反对称的. 反之，这个极限在反对称情形下在分布意义下存在，这就引导我们把理论建立在双线性型 $J(f,g) = \langle T(f), g\rangle = \langle S, g \otimes f\rangle$ 的基础上；f 和 g 是两个检验函数，T 是 $\mathscr{D}$ 到 $\mathscr{D}'$ 内的一个线性算子，S 是 T 的分布核. S 和 K 的联系由 K 是 S 在对角面余集上的限制所保证.

请看澄清这些区分的一个例子. 用 $\theta(x)$ 表示 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$中的一个奇函数，满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \theta(x) dx = 1$. 假定 θ 的支集是两个区间 $[-4/3, -2/3]$ 和 $[2/3, 4/3]$的并集，再作核

$$K(x,y)=\sum_{0}^{\infty}2^{k}\theta(2^{k}(x-y))\exp(i2^{k}(x+y)).$$

直接看出 $K(y,x)=-K(x,y)$, $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-1}$, $|\partial K/\partial x|\leqslant C_1|x-y|^{-2}$. 若 f 属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$,在$[-10,10]$上等于 1,当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时从 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)dy$ 的存在性推出级数 $\sum\limits_{0}^{\infty}\exp(i2^{k}x)$ 的收敛性. 这个级数(在简单收敛的意义下)处处发散,但在分布意义下收敛,这导致构造

$$J_{\varepsilon}(f,g)=\iint_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)g(x)dydx,$$

其中 $K(x,y)$ 是一个反对称核,满足 $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-1}$而 f 和 g 是 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$中的两个函数,于是

$$J_{\varepsilon}(f,g)=\frac{1}{2}\iint_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)(f(y)g(x)-f(x)g(y)dydx.$$

我们用绝对收敛积分 $\frac{1}{2}\iint K(x,y)(f(y)g(x)-f(x)g(y)dydx$ 定义了 $J(f,g)$. 从而 $J(f,g)=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}J_{\varepsilon}(f,g)$, 这就允许用 $\langle T(f),g\rangle=J(f,g)$ 构造 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$.

核非反对称的情形更加脆弱,以致不能从核出发定义算子,我们交换角色的次序,而从一个算子 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 出发. 设 $S\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 是 T 的分布核. S 的存在由 Schwartz 的著名核定理保证. 而 S 和 T 的联系由 $\langle T(f),g\rangle=\langle S,g\otimes f\rangle$ 提供;第一个括号表示 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 之间的对偶,而第二个是 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 之间的对偶.

把由 $y\neq x$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$定义的 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$的开集记为 Ω,我们关心 S 在 Ω 的限制,记之为 $K(x,y)$.

定义 1 设 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子. 我们说 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子,如果下列四个条件满足:

存在常数 C_0 使 $K(x,y)$ 是在 Ω 上局部可积的函数并满足

$$|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n};\tag{2.1}$$

存在一个指数 $\gamma\in]0,1]$ 和一个常数 C_1使得当 $(x,y)\in\Omega$ 和 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时有

$$|K(x',y)-K(x,y)|\leqslant C_1|x'-x|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma};\tag{2.2}$$

同样当 $|y'-y|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时有

$$|K(x,y')-K(x,y)|\leqslant C_1|y'-y|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma};\tag{2.3}$$

T 可扩张为一个 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的连续线性算子,其范数小于或等于 C_2.

若 $\gamma=1$,条件 (2.2) 和 (2.3) 可更简洁地写成 $|\partial K/\partial x_j|+|\partial K/\partial y_j|\leqslant C_1|x-y|^{-n-1}(1\leqslant j\leqslant n)$.

回到引言中我们称之为"第二代 Calderon-Zygmund 算子"的算子. 这时核有形式 $L(x,x-y)$,$L(x,u)$ 满足 (1.5),(1,6)和(1.7). 这种核决不满足估计(2.2),除非 $L(x,u)$ 不依赖于 x. 这时算子是卷积算子,即第一代 Calderon-Zygmund 算子. 为证明这一注释,我们简单地注意到,不然的话核 $K(x,y)$ 和 $\lambda^n K(\lambda x,\lambda y)$ 以同样的常数 C_1满足 (2.2),应用 $L(x,u)$ 关于 u 的齐次性,若(2.2)满足,就推出对所有 $\lambda\geqslant 1$ 和所有长度为 1 的 u 有

$$|L(\lambda x,u)-L(\lambda x',u)|\leqslant C_1|x'-x|^{\gamma},$$

只要 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}$. 令 λ 趋向于无穷,即得所要的结论.

因此条件 (2.2) 对大的 $|x-y|$ 是不满足的.

称子集 $\mathscr{B}\subset\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))$ 是Calderon-Zygmund 算子的一个有界集,如果算子 $T\in\mathscr{B}$ 以同一指数 γ 和同样的常数 C_2, C_1和 C_0满足 (2.1),(2.2),(2.3) 和 (2.4).

用 $\mathscr{G}$ 表示形如 $Uf(x)=\delta^{-n/2}f(\delta^{-1}(x-x_0))(x_0\in\mathbb{R}^n,\delta>0)$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的酉同构. 若 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子,则族 $UTU^{-1},U\in\mathscr{G}$; 是 Calderon-Zygmund 算子的一个有界集.

UTU^{-1} 的核是 $\delta^{-n}K(\delta^{-1}(x-x_0),\delta^{-1}(y-y_0))$，我们重新得到有关条件 (2.1) 至 (2.4) 在比例尺改变时不变性的注释.

我们建立由下述命题给出的"弱紧性定理".

命题 1 设 $T_j(j\in\mathbb{N})$ 是 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列. 则存在一个 Calderon-Zygmund 算子 T 和一个子序列 $T_{j(m)}$ 使对 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle T_{j(m)}(f),g\rangle\rightarrow\langle T(f),g\rangle. \tag{2.5}$$

这时记成 $T_{j(m)}\rightarrow T$.

由于算子 $T_j:L^2(\mathbb{R}^n)\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 的范数组成一个有界序列，可以抽一个子序列 $T_{j(m)}$，它弱收敛到一个线性算子 $T:L^2(\mathbb{R}^n)\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

还需要证明 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子. 用 S_m和 S 表示 T_m和 T 的分布核. 那么 S 是 S_m在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$分布收敛意义下的极限. S_m在开集 Ω 的所有紧子集上的限制是关于 m 一致满足 Hölder 条件的连续函数. Ascoli 定理蕴含 S_m在这些紧子集上一致收敛到 S. 在 S_m所满足的不等式(2.1),(2.2),(2.3) 中过渡到极限，就得到关于 S 的条件 (2.1),(2.2),(2.3).

反之，所有 Calderon-Zygmund 算子可表示成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列 T_m在(2.5) 意义下的极限. T_m的分布核事实上是无穷次可微的有界函数. 更精确地，我们有

命题 2 设 $T:L^2(\mathbb{R}^n)\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个相应于核 $K(x,y)$ 的 Calderon-Zygmund 算子. 则存在序列 $K_m(x,y)\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 使 $\partial/\partial x_jK_m$和 $\partial/\partial y_jK_m$也属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，并且具有下列性质：

由 $T_mf(x)=\int K_m(x,y)f(y)dy$ 定义的算子 T_m 组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列. (2.6)

对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，有

$$\lim_{m\to\infty} \| T(f) - T_m(f) \|_2 = 0. \tag{2.7}$$

为证明之，设 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是一个积分等于 1 的偶函数，令 $\varphi_m(x) = m^n \varphi(mx)$，并用 R_m表示用 φ_m作的卷积算子. 考虑 $T_m = R_m T R_m$. 设 $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 是 T 的分布核，S_m是 T_m的分布核，于是有

$$\begin{aligned} S_m(x,y) &= \iint \varphi_m(x-u) S(u,v) \varphi_m(v-y) du dv \\ &= \langle T\tau_y \varphi_m, \tau_x \varphi_m \rangle \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 τ_x表示 x 平移算子.

为结束证明，我们可以假设 φ 的支集含于 $|x| \leqslant 1$，并且限于在 (2.2) 和(2.3) 中 $\gamma = 1$ 的情形.

若 $|x-y| \geqslant 4/m$，$\tau_y\varphi_m$和 $\tau_x\varphi_m$的支集不相交，则

$$\begin{aligned} S_m(x,y) &= \iint \varphi(x-u) K(u,v) \varphi_m(v-y) du dv \\ &= \iint K\left(x - \frac{u}{m}, y - \frac{v}{m}\right) \varphi(u) \varphi(v) du dv. \end{aligned}$$

因此只要 $|x-y| \geqslant 4/m$，$S_m(x,y)$ 以一致常数具有性质(2.1)，(2.2)，(2.3).

若 $|x-y| < 4/m$，我们利用 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性得到 $|S_m(x,y)| \leqslant Cm^n$，同样有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} S_m(x,y) &= \iint \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(x-u) S(u,v) \varphi_m(v-y) du dv \\ &= -\langle T\tau_y \varphi_m, \tau_x \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_m \rangle, \end{aligned}$$

从而有

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} S_m(x,y) \right| \leqslant Cm^{n+1}.$$

这些估计蕴含当 $|x-y| < 4/m$ 时 (2.1) 和 (2.2) 成立. (2.3)的

情形类似.

$T_m(f)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 $T(f)$ 是显然的,命题 2 证毕.

最后还有一个一般性质值得一提. 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子. 假定与 T 相应的核是零,那么 T 是逐点乘以一个函数 $m(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的乘积算子.

为验证这一事实,我们摹仿前面的逼近格式,不过用一个更为粗浅的方式. 以 $\mathscr{Q}_j$表示二进方体 $2^{-j}k + 2^{-j}[0,1[^n (k \in Z^n)$ 的族,以 $V_j \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ 表示在每个 $Q \in \mathscr{Q}_j$ 上取常数值的函数的子空间,再设 $E_j: L^2(\mathbb{R}^n) \to V_j$ 是相应的条件期望算子. 若 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界且是局部的(即对 $f \in L^2$,$T(f)$ 的支集含于 f 的支集内),那么对于 $E_jTE_j: V_j \to V_j$也如此. 由此推出限制在 V_j上时,E_j是与一个函数 $m_j(x)$ 逐点相乘的乘法算子,m_j在每个立方体 $Q \in \mathscr{Q}_j$ 上也是常数. 另外有

$$\| m_j \|_\infty = \| E_jTE_j \| \leqslant T.$$

E_jT 和 $E_{j+1}T$ 之间的相容条件直接提供等式 $m_j = E_j(m_{j+1})$. 于是函数序列 $m_j(x)$ 是一个一致有界的鞅,它收敛到 $m(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 简单地过渡到极限就证明了 T 是和这个函数 $m(x)$ 作乘积的乘积算子.

与上述证明类似,为证明命题 2 我们也可用算子 E_j代替正则化算子 R_m,E_m与一个正则性 $r \geqslant 1$ 的多分辨率分析相对应. 形成 T 的逼近的 Calderon-Zygmund 算子的有界序列的算子 T_j便由 E_jTE_j取代.

由于命题 2,人们可以首先仅用绝对收敛积分叙述 Calderon-Zygmund 算子的所有理论,再以过渡到极限作为结束. 这一观点出现在 [76]中,就我们所知,[76]是我们这里介绍的一般理论的第一个重要文献.

Calderon-Zygmund 算子的第二个逼近技巧基于核的截断. 为此,设 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$是一个偶函数,它当 $|x| \leqslant 1$ 时等于 1 而当 $|x|$

$\geqslant 2$ 时等于 0. 用 $K_\delta(x,y) = K(x,y)\left(1-\varphi(\frac{x-y}{\delta})\right)$ 代替 $K(x,y)$,在这些条件下,当 $|x-y| \leqslant \delta$ 时 $K_\delta(x,y)=0$,核的奇异性消失了,把由 K_δ定义的算子记为 T_δ,T 与诸 T_δ间的关系由下列命题描述.

命题 3 诸 T_δ组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界集. 存在一个趋于 0 的序列 δ_j和一个函数 $m(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,使对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中所有两个函数的对 (f,g) 有

$$\langle Tf,g\rangle = \lim_{j\to+\infty}\langle T_{\delta_j}f,g\rangle + \int m(x)f(x)g(x)dx. \quad (2.9)$$

先证第一个断言,我们有

$$\varphi(u) = (2\pi)^{-n}\int e^{iu\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

以及

$$K_\delta(x,y) = \left(1-\varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right)\right)S(x,y),$$

其中 S 是 T 的分布核. 然后我们用 Fourier 表示展开 $\varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right)$,这就分离了变量

$$\varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi\delta^{-1}}e^{-iy\cdot\xi\delta^{-1}}\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

从而

$$K_\delta(x,y) = S(x,y) - R_\delta(x,y),$$

其中

$$R_\delta(x,y) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi\delta^{-1}}S(x,y)e^{-iy\cdot\xi\delta^{-1}}\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

把以 $R_\delta(x,y)$ 作为分布核的算子记为 $\mathscr{R}_\delta$,并以 $M_{(\xi)}$表示和 $e^{ix\cdot\xi}$逐点相乘的乘法算子. 我们有

$$\mathscr{R}_\delta = (2\pi)^{-n}\int M_{(\delta^{-1}\xi)} T M^*_{(\delta^{-1}\xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

而 $\mathscr{R}_\delta: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的范数不超过 $(2\pi)^{-n} \| T \| \; \| \hat{\varphi} \|_1$.

分别考虑 $|x-y| \leqslant \delta, \delta \leqslant |x-y| \leqslant 2\delta$ 和 $|x-y| \geqslant 2\delta$ 这三种情形不难验证估计 (2.1),(2.2)和(2.3).

为了证明第二个断言,首先抽一个序列 δ_j 使 $\langle T_{\delta_j} f, g\rangle \to \langle Lf, g\rangle$, L 是某个 Calderon-Zygmund 算子. 若 f 和 g 是支集不相交的两个检验函数,当 j 充分大时我们有 $\langle T_{\delta_j} f, g\rangle = \langle Tf, g\rangle$. 由此推出 $\langle Tf, g\rangle = \langle Lf, g\rangle$. 与 $T-L$ 相应的核是零,从而(2.9)成立.

从下述事实看出命题 2 叙述的逼近技术优于方才所用的. 这个事实是:若 T 在 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上或其对偶 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 上有界,则命题 2 的算子 T_m 保持这一性质,命题 3 的逼近算子则不然.

3. Calderon-Zygmund 算子和空间 L^p

本节目的是研究当 $1 < p < \infty$ 时 Calderon-Zygmund 算子在空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性,并且叙述极限情形 $p=1$ 和 $p=\infty$ 时的境况.

设 $K(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的一个局部可积函数,假定算子 $Tf(x) = \int K(x,y) f(y) dy$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上连续,那么必有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{ess} \int |K(x,y)| dy < \infty, \tag{3.1}$$

而 $\| T \|_{\infty,\infty}$ 正是由(3.1)给出.

同样,若 T 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上连续,那么 $\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \mathrm{ess} \int |K(x,y)| dx$ 必然有限,并且等于 $\| T \|_{1,1}$.

Calderon-Zygmund 算子不满足这些条件,这是由于由(2.1)

描述的核的奇异性通常是太强了.

Calderon-Zygmund 算子从 L^1到 L^1不连续.与此相反,它可扩张为一个从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到弱 L^1的连续算子,我们就要定义这后一空间.

定义 2 一个在 $\mathbb{R}^n$上可测的函数 $f(x)$ 属于弱 L^1,如果

$$\|f\|_w = \sup_\lambda \lambda |\{x : |f(x)| > \lambda\}|$$

有穷.

本质的一点是 $\|f\|_w$并非一个范数.我们有 $\|f+g\|_w \leqslant 2\|f\|_w + 2\|g\|_w$,这个不等式可以直接验证.事实上,若 $|f(x)+g(x)| > \lambda$,必有 $|f(x)| > \lambda/2$ 或 $|g(x)| > \lambda/2$. 反映到集合上,就有

$$|\{x : |f(x)+g(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{2}{\lambda}\|f\|_w + \frac{2}{\lambda}\|g\|_w.$$

这蕴含弱 L^1是一个向量完备度量空间.但弱 L^1不是一个 Banach 空间,为看出这一事实,我们考虑 1 维情形.我们注意到 $|x-x_0|^{-1}$ 属于弱 L^1,其范数为 2. 但这些函数的凸组合 $2^{-j}\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant 2^j}|x-2^{-j}k|^{-1}$不能组成弱 L^1的一个有界序列,因为这些凸组合在整个区间上超过 cj,$c>0$ 是一个常数.

为证度量空间的弱 L^1完备性,只需验证若 $\|f_k\|_w \leqslant 2^{-k}$,则有 $\sum\limits_0^\infty f_k = f$ 属于弱 L^1. 为此,我们采用推出(3.1)所进行的推理.若 $|f(x)| > \lambda$,那么存在 k 使 $|f_k(x)| > \alpha\lambda 2^{-k/2}$($\alpha = 1 - 1/\sqrt{2}$).而

$$|\{x ; |f_k(x)| > \alpha\lambda 2^{-k/2}\}| \leqslant (\alpha\lambda)^{-1}2^{k/2}\|f_k\|_w \leqslant (\alpha\lambda)^{-1}2^{-k/2}$$

由此即可得出结论.

现在回到 Calderon-Zygmund 算子，空间 L^1和空间弱 L^1之间的关系.

定理 1 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，(2.1)，(2.3)和(2.4)中与之相应的常数 $C_0 = C_1 = C_2 = 1$（而(2.2) 不起任何作用）. 则存在一个常数 $C = C(n,\gamma)$ 使对所有函数 $f \in L^1 \cap L^2$和所有 $\lambda > 0$ 有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n;\ |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1. \tag{3.2}$$

如果空间弱 L^1是一个 Banach 空间，那么定理 1 仅仅假设(2.1)就显然成立，因为积分 $\int K(x,y)f(y)dy$ 可以看作对 y 一致属于弱 L^1的函数 $x \to K(x,y)$ 的叠加.

为了证明定理 1，Calderon 和 Zygmund 发现了函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的一个值得重视的（非线性）分解. 这一分解今日称为"Calderon-Zygmund 分解"，定理 2 叙述了这一分解的性质.

定理 2 设 $f(x)$ 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的一个函数，λ 是一个正实数，称为 f 的 Calderon-Zygmund 分解的阈值. 那么 f 可以表示成一个属于 $L^1 \cap L^2$的函数 g 和一个由十分振动且局部化的项 $b_j (j \in J)$ 组成的级数之和.

更精确地说，存在不相交的方体 Q_j，其并集记作 Ω，使每个函数 b_j 的支集含于相应的 Q_j，且有

$$f = g + \sum_{j\in J} b_j，\text{在整个 } \mathbb{R}^n \text{上}, \tag{3.3}$$

$$\text{对几乎所有的 } x \notin \Omega, |g(x)| = |f(x)| \leqslant \lambda \tag{3.4}$$

$$\text{对所有 } x \in \Omega, |g(x)| \leqslant 2^n \lambda, \tag{3.5}$$

$$|\Omega| \leqslant \lambda^{-1}\|f\|_1, \tag{3.6}$$

$$\|g\|_2 \leqslant 2^n \lambda^{1/2} \|f\|_1^{1/2}, \tag{3.7}$$

$$\int_{Q_j} |b_j(x)|dx \leqslant 2^{n+1}\lambda|Q_j|, \tag{3.8}$$

$$\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0. \tag{3.9}$$

在证明这个结果之前，先给出一个有趣的例子. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ 是区间 $[0,1]$的指示函数，今欲对阈值 2^{-m}，$m \in \mathbb{N}$，实现 f 的 Calderon-Zygmund 分解. 那么 Ω 是区间 $[0,2^m]$，在这个区间上 $g(x)=2^{-m}$，而在其余的点 $g(x)=0$. $b(x)=f(x)-g(x)$ 是积分为零且支集在分解的唯一"方体"$[0,2^m]$内的一个函数，b 满足(3.8).

现转向定理 2 的证明，从所有二进方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$的集族 $\mathscr{D}$ 出发，以条件 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx > \lambda$ 定义 $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$. 面对的第一种情形是 $\mathscr{C}$ 是空的，这时对所有二进方体 Q 有 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leqslant \lambda$，这表明 $\|f\|_\infty \leqslant \lambda$，在第 2 节我们曾注意到这一事实. 在这种情形，Calderon-Zygmund 分解就是 $f = g$，没有振动项 b_j，$j \in J$.

若 $\mathscr{C}$ 不是空的，方体 $Q\in\mathscr{C}$ 的体积 $|Q|$ 满足 $|Q| < \lambda^{-1}\|f\|_1$，并且方体 $Q \in \mathscr{C}$ 的并集与互不相交的最大方体 Q_j $(j \in J)$ 的并集一致.

对所有方体 $Q\in\mathscr{C}$，用 $\tilde{Q}$ 表示 Q 的"父亲"，即 $\tilde{Q}$ 是包含 Q 且棱长为 Q 的二倍的那个二进方体.

因为 Q_j 是最大的，它的"父亲" $\tilde{Q}_j$ 不再属于 $\mathscr{C}$，于是 $\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} |f(x)|dx \leqslant \lambda$，由此推出 $\int_{\tilde{Q}_j} |f(x)|dx \leqslant 2^n \lambda|Q_j|$，并且 $|m_{Q_j}f| \leqslant 2^n \lambda$，这里 $m_{Q_j}f$ 是 f 在 Q_j上的均值.

当 $x \in Q_j$时，定义 $b_j(x) = f(x) - m_{Q_j}f$，当 $x \notin Q_j$时，定义 $b_j(x) = 0$. 若 $x \notin \Omega$，令 $g(x) = f(x)$，而若 $x \in Q_j$，令 $g(x) = m_{Q_j}f$，由这些定义，我们有等式 (3.3).

现在验证 (3.4)，即当 $x \notin \Omega$ 时 $|f(x)| \leqslant \lambda$，若 x 不属于 Ω，就表明对于含有 x 的所有二进方体 Q 有 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy \leqslant \lambda$.

以 E_j 表示对棱长为 2^{-j} 的所有二进方体的族取条件期望(即均值)的算子. 于是在 $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ 上有 $|E_j(f)(x)| \leqslant x$，但当 j 趋于无穷时，$E_j(f)$ 几乎处处收敛于 f，因此在 $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ 上几乎处处有 $|f(x)| \leqslant \lambda$.

性质 (3.5)已经验证，现在看(3.6). 我们有

$$|\Omega| = \sum_{j \in J} |Q_j| \leqslant \lambda^{-1} \sum_{j \in J} \int_{Q_j} |f(y)|dy \leqslant x^{-1} \|f\|_1.$$

对于 (3.7)，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g|^2 dx &= \int_\Omega |g|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} |g|^2 dx \\
&\leqslant \sum_{j \in J} |m_{Q_j} f|^2 |Q_j| + \lambda \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} |f(x)|dx \\
&\leqslant \sum_{j \in J} 4^n \lambda^2 |Q_j| + \lambda \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} |f(x)|dx \\
&\leqslant 4^n \lambda \sum_{j \in J} \int_{Q_j} |f(x)|dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} |f(x)|dx \\
&= 4^n \lambda \int_\Omega |f(x)|dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} |f(x)|dx \\
&\leqslant 4^n \lambda \|f\|_1.
\end{aligned}$$

定理 2 证明完毕，并可返回到定理 1 的证明.

必须注意条件 (2.1)至(2.4)不是完全必要的. 保留条件(2.4)，可以把(2.1)，(2.2)和(2.3)换成单一条件

$$\int_{\{|x-y| \geqslant 2|y'-y|\}} |K(x,y') - K(x,y)|dx \leqslant C_1. \qquad (3.10)$$

我们就在条件(2.4)和(3.10)之下进行证明. 显然可以设 $C_1 = C_2 = 1$，$\|f\|_1 = 1$.

对 f 按阈值 λ 进行 Calderon-Zygmund 分解. 于是得到定理 2

中所说的方体 $Q_j, j\in J$. 用 Q_j^* 表示二倍方体，Q_j^* 的中心是 Q_j 的中心，而 Q_j^* 的对角线是 Q_j的对角线的二倍. 定义 Ω^* 为 Q_j^* 的并集，我们有

$$|\Omega^*| \leqslant \sum_{j\in J}|Q_j^*| \leqslant 2^n\sum_{j\in J}|Q_j| \leqslant 2^n\lambda.$$

设 E 是不属于 Ω^* 的且使 $|Tf(x)|>\lambda$ 的点 x 的集合. 若我们证明了 $|E|\leqslant Cx^{-1}$，证明就结束了. 这是因为 $|Tf(x)|>\lambda$ 的所有点 $x\in\mathbb{R}^n$ 的集合含于 $E\cup\Omega^*$，并且 $|\Omega^*|\leqslant 2^n/\lambda$.

在(3.3)中令 $b(x)=\sum_{j\in J}b_j(x)$，用 E_1 和 E_2 分别表示由 $|Tg(x)|>\lambda/2$ 和 $|Tb(x)|>\lambda/2$ 定义的 E 的子集. 于是 $E\subset E_1\cup E_2$，这就告诉我们要放大 E_1和 E_2的测度.

为放大 $|E_1|$，简单地利用 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性. 我们有 $\|Tg\|_2\leqslant\|g\|_2\leqslant 2^n\lambda^{1/2}$. Bienaymé-Tchehitcheff 不等式给出

$$\frac{\lambda^2}{4}|E_1|\leqslant\|Tg\|_2^2\leqslant 4^n\lambda,$$

因而 $\quad |E_1|\leqslant 4^{n+1}\lambda^{-1}$.

现在过渡到 E_2. 我们有 $b=\sum_{j\in J}b_j$，若 f 属于 $L^1\cap L^2$，这个级数同样在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛，我们正是假定 f 属于 $L^1\cap L^2$，于是有 $Tb(x)=\sum_{j\in J}Tb_j(x)$，若 x 不属于 Ω^*，由 T 通过核的表达式得

$$\begin{aligned}Tb_j(x)&=\int_{Q_j}K(x,y)b_j(y)dy\\&=\int_{Q_j}(K(x,y)-K(x,y_j))b_j(y)dy,\end{aligned}$$

y_j是 Q_j的中心. 我们计算积分

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*}|Tb(x)|dx\\&\leqslant\sum_{j\in J}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*}\{\int_{Q_j}|K(x,y)-K(x,y_j)||b_j(y)|dy\}dx.\end{aligned}$$

我们利用 Fubini 定理计算上面的每一个重积分. 即先冻结 y 和

y_j，利用(3.10)．于是得 $I \leqslant C_1 \sum \|b_j\|_1$，再利用(3.6)和(3.8)放大得 $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb(x)| dx \leqslant 2^{n+1} C_1$，只需再次利用 Bienaymé-Tchebitcheff 不等式，即得结论.

定理 1 已证明完毕.

我们仍然按照 Calderon 和 Zygmund 指出的路子进行推理，注意到 T 从 L^1 到弱 L^1 和从 L^2 到 L^2 是连续的，那么利用 Marcinkiewicz 内插定理 ([217]p.21，th.5)即可证明 T 的 L^p 连续性，$1<p\leqslant 2$.

若 $2\leqslant p<\infty$，我们注意 T 的伴随算子 T^* 仍是一个 Calderon-Zygmund 算子；相应的核 $K^*(x,y)$ 正是 $\overline{K}(y,x)$. 设 $q\in]1,2]$ 是 $p\in [2,\infty[$ 的共轭指数，T^* 在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性导致 T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性.

我们现在回到 $p=1$ 的情形，但要用 Stein 和 Weiss 的空间 H^1 代替 L^1.

为证明所有 Calderon-Zygmund 算子可扩张为一个 H^1 上的取值在 L^1 中的连续性算子，我们利用 H^1 函数的原子分解.

设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球，体积为 $|B|$，而 $a(x)$ 是一个支集在 B 内的原子：$\|a\|_2 \leqslant |B|^{-1/2}$，$\int_B a(x)dx = 0$，而在 B 外 $a(x)=0$.

我们要证 $\|T(a)\|_1 \leqslant C$，C 是一个仅依赖于定义中的常数 C_0，C_1 和 C_2 以及维数 n 的常数，这里定义中的假设还是太强，可用 (3.10) 代替.

用 B^* 表示 B 的“倍”球，我们有

$$\|T(a)\|_1 = \int_{B^*} |T(a)| dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} |T(a)| dx = I + J.$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式放大 I，

$$I \leqslant |B^*|^{1/2} \|T(a)\|_2 \leqslant 2^{n/2} |B|^{1/2} \|T\| \, \|a\|_2 \leqslant 2^{n/2} \|T\|.$$

致于 J，还是利用 T 通过核 K 的表达式，设 B 的中心是 x_0，

而半径是 r，那么

$$J \leqslant \int_{|x-x_0|\geqslant 2r}\left\{\int_{|y-x_0|\leqslant r}|K(x,y)-K(x,y_0)|\,|a(y)|dy\right\}dx.$$

条件(3.10)提示先计算对 x 的积分，然后对 y 积分，并利用显然的放大 $\|a\|_1\leqslant 1$.

似乎在对 H^1的所有原子 $a(x)$ 获得 $\|T(a)\|_1\leqslant C$ 之后，$T: H^1\to L^1$连续性的证明即告结束，其实不然.

如果注意到原子分解缺乏唯一性，在 H^1上定义 T 谅必会遇到困难. 为此，我们利用下列引理.

引理 1　设 $a_j(x)$ 是 H^1的原子，系数 λ_j满足 $\sum_0^\infty|\lambda_j|<\infty$，并且 $\sum_0^\infty\lambda_j a_j(x)=0$，则对于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 范数，级数 $\sum_0^\infty\lambda_j T(a_j)$ 收敛到 0.

如果 Calderon-Zygmund 算子在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上有界，自然没什么要证的.

为了证明引理，我们利用命题 2 提供的逼近 T_m，T_m的核 K_m 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，从而有 $\sum_0^\infty\lambda_j T_m(a_j)=0$.

然后注意到 T_m组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列，由前面的推理即知 $\|T_m(a_j)\|\leqslant C$.

易证对每个固定的 j，在 L^1 范数意义下，$T_m(a_j)$ 收敛到 $T(a_j)$. 最后有 $\sum_0^\infty\lambda_j T(a_j)=0$，这是因为当 m 趋于无穷时 $\sum\lambda_j(T(a_j)-T_m(a_j))$ 按 L^1范数趋于 0.

这就结束了 Calderon-Zygmund 算子的 (H^1,L^1)连续性的证明.

作为推论，利用对偶 (L^1,L^∞) 和 (H^1,BMO) 我们可以定义 Calderon-Zygmund 算子到 L^∞ 的扩张. 更精确地说，设 $b(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，我们用下式

$$\langle T(b),u\rangle = \langle b,{}^tT(u)\rangle, u\in H^1 \tag{3.11}$$

把 $T(b)$ 定义为 H^1上的连续线性型.

第二个对偶括号有意义，这是因为 T 的转置还是一个 Calderon-Zygmund 算子，并且 ${}^tT(u)\in L^1$. 由此 $T(b)$ 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

把这个定义跟 T 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的作用联系起来是适宜的. 为此，我们注意若$b\in L^\infty\cap L^2$且 u 是一个原子，那么 (3.11) 变成一个等式. 另外，若 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，定义函数 $b_j(x)=b(x)$，若 $|x|\leqslant j$，$b_j(x)=0$，若 $|x|>j$. 那么 $T(b_j)$ 作为 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的作用结果有意义. 若 u 是 H^1 的一个原子，那么

$$\langle T(b_j),u\rangle = \langle b_j,{}^tT(u)\rangle \to \langle b,{}^tT(u)\rangle.$$

事实上，$\|f_j\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$，且几乎处处 $b_j(x)\to b(x)$，${}^tT(u)\in L^1(\mathbb{R}^n)$，这就使得可以利用 Lebesgue 控制收敛定理. 于是函数 $T(b_j)$ 组成 BMO $(\mathbb{R}^n)$ 中的一个有界序列，这个序列在 $\sigma(\mathrm{BMO},H^1)$ 拓扑的意义下收敛到 $T(b)$.

下列引理更精确地刻画 $T(b_j)$ 的收敛性.

引理 2 若 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，b_j是把函数 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$截断得到的函数，那么存在一个常数序列 $c(j)$，使在所有紧集上，$T(b_j)-c(j)$ 一致收敛到一个 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$的函数，这个函数是 $T(b)$ 的一个以常数函数为模的表示.

事实上，令 $c(j)=\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}K(0,y)b(y)dy$，我们要证明在紧球 $|x|\leqslant R$ 上，$T(b_j)-c(j)$ 一致收敛. 为此，把 b_j分解为 $g+h_j$，当 $|x|\leqslant 2R$ 时 $g(x)=b(x)$，对其余的 x，$g(x)=0$. 假定 $j>$

$2R$，当 $|x| \leqslant R$ 时，我们有

$$T(b_j)(x) = T(g)(x) + T(h_j)(x)$$
$$= T(g)(x) + \int_{2R \leqslant |y| \leqslant j} K(x,y)b(y)dy$$
$$= T(g)(x) + \int_{2R \leqslant |y| \leqslant j} (K(x,y)$$
$$- K(0,y)b(y)dy + c(j) - C(R),$$

其中 $C(R) = \int_{1 \leqslant |y| \leqslant 2R} K(0,y)b(y)dy$. 在无穷远，$K(x,y) - K(0,y) = O(|y|^{-n-\gamma})$，这就保证了在 $|x| \leqslant R$ 上积分一致收敛.

$T(b)$ 的这个新定义和由对偶得到的定义是相容的. 事实上，若 u 是 H^1的一个原子，u 必有紧支集且积分为零. 于是 $\langle T(b_j) - c(j), u\rangle = \langle T(b_j), u\rangle = \langle b_j, {}^tT(u)\rangle \to \langle b, {}^tT(u)\rangle$. 若 g 是函数 $T(b_j) - c(j)$（在所有紧集上一致收敛）的极限，我们得到 $\langle g, u\rangle = \langle b, {}^tT(u)\rangle = \langle T(b), u\rangle$，从而 g 是 $T(b)$ 的一个表示.

由引理 2 提供的 $T(b)$ 的直接定义自然引导出 $T(b) \in \mathrm{BMO}$ 的一个直接证明，只要 b 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 并且与 T 相应的核满足条件

$$\int_{|x-y| \geqslant 2|x'-x|} |K(x',y) - K(x,y)| dy \leqslant C_1. \qquad (3.12)$$

为指出 $T(b)$ 属于 BMO，以 B 表示一个中心为 x_0半径为 R 的任意球，B^* 是与 B 同心且半径为 $2R$ 的球，令 $b = b_1 + b_2$，b_1 是 b 和 B^* 的指示函数的乘积. 当 $x \in B$ 时，用绝对收敛积分

$$Tb_2(x) = \int_{|x_0-y| \geqslant 2R} (K(x,y) - K(x_0,y))b_2(y)dy \qquad (3.13)$$

定义 $Tb_2(x)$是恰当的.

$Tb_2(x)$的这一定义引导出 $Tb(x)$ 的一个定义，因为 Tb_1没任何问题：事实上 $b_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 最后，$Tb(x)$ 的这一定义跟由引理 2 给的逐点定义是相容的（即仅相差一个依赖于 x_0和 R 的常数）.

作了这些准备，$T(b)$属于 BMO 的证明就十分简单了. 由 (3.10)，我们有

$$\| Tb_2 \| \leqslant \| b \|_\infty \int_{|y-x_0|\geqslant 2|x-x_0|} |K(x,y) - K(x_0,y)| dy$$
$$\leqslant C \| b \|_\infty,$$

又有

$$\| Tb_1 \|_2 \leqslant \| T \| \ \| b_1 \|_2$$
$$\leqslant 2^{n/2} \| b \|_\infty |B|^{1/2} \| T \|,$$

因此

$$\left(\int_B |Tb|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant C \| b \|_\infty |B|^{1/2} + 2^{n/2} \| b \|_\infty |B|^{1/2} \| T \|$$
$$\leqslant C' |B|^{1/2} \| b \|_\infty,$$

这就证明了 Tb 属于 BMO.

因为 BMO 是空间 H^1的对偶，若 f_j和 f 属于 BMO，对于所有函数 $h \in H^1$有$\langle f_j, h \rangle \to \langle f, h \rangle (j \to +\infty)$，我们将写成 $f_j \rightharpoonup f$（对于拓扑 $\sigma(\mathrm{BMO}, H^1)$）.

回忆了这个定义，再给出我们将经常用到的下面这个简单的引理.

引理 3 设 $T_j, j \in \mathbb{N}$，是一个 Calderon-Zygmund 算子序列，假定在命题 1 的意义下 $T_j \to T$，则对所有函数 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，在赋予拓扑 $\sigma(\mathrm{BMO}, H^1)$的 BMO 中有 $T_j(f) \rightharpoonup T(f)$.

为证明引理，考虑 T_j和 T 的转置 T_j^* 和 T^*，要证对于 $g \in H^1, f \in L^\infty, \langle f, T_j^*(g) \rangle$收敛到 $\langle f, T^*(g) \rangle$.

显然可归结为下述情形，g 是一个支集在中心为 x_0半径为 R 的球内的原子. 用 $\widetilde{B}$ 表示中心在 x_0半径为 $2R$ 的球，把 f 分解为 $f_1 + f_2$，其中当 $x \in \widetilde{B}$ 时 $f_1(x) = f(x)$，当 $x \notin \widetilde{B}$ 时 $f_1(x) = 0$.

于是 $\langle f_1, T_j^*(g) \rangle = \langle T_j f_1, g \rangle \to \langle T f_1, g \rangle$，因为算子 T_j:

$L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 弱收敛到 T.

而当 $x \notin B$ 时,$T_j^*(g)$ 关于 j 一致地满足 $|T_j^*(g)(x)| \leqslant C|x|^{-n-\gamma}$.

最后,Ascoli 定理允许假定(对 j 的一个子序列 j_m) $K_{j_m}(x,y)$ 一致收敛到 $K(x,y)$,只要 x 和 y 属于 $\mathbb{R}^n$的两个不相交的紧集. 由此推出 $T_{j_m}^*(g)(x)$ 收敛到 $T(g)(x)$,Lebesgue 控制收敛定理则保证了

$$\lim_{m\to\infty}\langle f_2, T_{j_m}^*(g)\rangle = \langle f_2, T^*(g)\rangle.$$

因为极限不依赖于子序列的选取,我们有

$$\lim_{j\to\infty}\langle f_2, T_j^*(g)\rangle = \langle f_2, T^*(g)\rangle.$$

4. Calderon-Zygmund 算子满足 $T(1)=0$ 或 $T^*(1)=0$ 的条件

提出下列问题是顺理成章的:刻画可以扩张为从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^1(\mathbb{R}^n)$(而不再是从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$)的连续线性算子的 Calderon-Zygmund 算子的特征. 同样可以研究能扩张为从 BMO 到 BMO(而不仅仅是从 L^∞ 到 BMO)的连续线性算子的 Calderon-Zygmund 算子的特征.

定义 3 我们说一个 Calderon-Zygmund 算子满足条件 $T^*(1)=0$,如果对所有原子 $a\in H^1$,$T(a)$ 的积分是 0.

因为 $T(a)$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$,这个定义显然有意义,记号 $T^*(1)=0$ 来自下列形式推演. 我们这样写 $\int_{\mathbb{R}^n} T(a)dx = \langle T(a),1\rangle = \langle a, T^*(1)\rangle$. 为得到 0,就要写 $T^*(1)=0$,但同样可写 $T^*(1)=4\cdots$. 我们用 T^* 表示 T 的转置算子,但易见考虑伴随算子也一样.

定理 3　一个 Calderon-Zygmund 算子 T 可以扩张为一个 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性算子，当且仅当 $T^*(1)=0$.

为证明这个结果条件(3.10)不好用，而利用条件(2.3)较为适宜.

条件 $T^*(1)=0$ 是必要的，事实上，对所有原子 $a(x)$，$Ta(x)$ 应当属于 $H^1(\mathbb{R}^n)$，因而其积分应当为零.

为证条件 $T^*(1)=0$ 的充分性，我们利用 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解，仿照 Coifman 和 Weiss 的方法，只需证明在乘以一个常数 $\gamma>0$ 以后，T 把 H^1 的原子变成分子，更精确地说，若 B 是与原子 $a(x)$ 相应的球，x_0表示 B 的中心，d 是其半径，我们将证明 $m(x)=Ta(x)$ 是一个中心为 x_0半径为 d 的分子，满足第 5 章的条件(5.1)，其中 $n<s<n+2\gamma$.

试看如何做这一验证. 用 $\widetilde{B}$ 表示中心为 x_0 半径为 $2d$ 的球. 若 x 不属于 $\widetilde{B}$，那么 $Ta(x)=\int K(x,y)a(y)dy=\int\{K(x,y)-K(x,x_0)\}a(y)dy$，这是由于 a 的积分是零. 利用条件(2.3) 推出 $|Ta(x)|\leqslant Cd^\gamma|x-x_0|^{-n-\gamma}$，

从而有 $\left(\int_{|x-x_0|\geqslant 2d}|x-x_0|^s|Ta(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqslant C'd^{(s-n)/2}$，正如所要证的那样. 为估计“内部积分”$\int_{|x-x_0|\leqslant 2d}|Ta(x)|^2dx$，先把积分区域换成 $\mathbb{R}^n$，再利用 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性.

最后由 $T^*(1)=0$ 得 $\int Ta(x)dx=0$. 为解决由于缺乏原子分解的唯一性带来的 T 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的正确定义问题，还要利用引理 1.

还可利用这个证明来建立下述事实，在同样的条件之下，T 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$上连续，这里 $n\left(\frac{1}{p}-1\right)<\gamma\leqslant 1, 0<p\leqslant 1$. H^p的分子由第 6 章的条件(3.5)定义.

当 $m \leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)<m+1$ 时,(2.3)要用下列更精密的条件代替.对所有重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m+1$, 有

$$|\partial_y^\alpha K(x,y)| \leqslant |x-y|^{-n-|\alpha|}. \tag{4.1}$$

同样地,条件 $T^*(1)=0$ 要换成对所有重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$, 以阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式为模, $T^*(x^\alpha)=0$. 这个条件恰好表明,若 f 是一个平方可积函数,其支集是紧集,并且对所有多重指标 α, $|\alpha| \leqslant m$, 有 $\int x^\alpha f(x)dx=0$, 那么对于 $\int x^\alpha Tf(x)dx$ 亦如是. 由于在无穷远处, $Tf(x)=O(|x|^{-n-m-1})$, 后一积分有意义. 为获得这一估计,只需在 f 的支集上,以 $K(x,y)$ 按照 $(y-x_0)$ 的 Taylor 展开式代替 $K(x,y)$.

作了这些说明,定理 3 以下列方式推广.

命题 4 设 $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子,其核满足(4.1),设 $0<p\leqslant 1$, $m \leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)<m+1$, 那么 T 可以扩张为 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续线性算子的充分必要条件是:对所有满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的多重指标 α, $T^*(x^\alpha)=0$, 模阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式.

若 T 是一个卷积算子,那么条件 $T^*(x^\alpha)=0$ 自然满足. 这正是为什么当理论限于这些算子时,这个条件从不露面.

推论 当且仅当 $T(1)=0$, 一个 Calderon-Zygmund 算子 T 在 BMO 上定义一个连续线性算子.

注意到 T 到 BMO 的扩张由 $\langle T(f),g\rangle = \langle f,T^*(g)\rangle$ 给出,其中 $f \in \mathrm{BMO}$, $g \in H^1$, 立刻得到推论.

现在回到 Stein 和 Weiss 的空间 H^1 用小波基定义的不变性,

即要证明，若 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 和 $\tilde{\psi}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 是两个这样的基，那么对所有系数序列 $\alpha(\lambda), \lambda \in \Lambda$，条件 $\sum \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \in H^1$ 和 $\sum \alpha(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x) \in H^1$ 是等价的. 为此，考虑下列算子 $U: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$，它由 $U(\psi_\lambda) = \tilde{\psi}_\lambda$ 定义. U 的分布核是 $S(x,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \tilde{\psi}_\lambda(x)\bar{\psi}_\lambda(y)$. 可以直接验证(利用小波的正则性和局部性)限制在 $y \neq x$，$S(x,y)$ 满足定义 1 的条件(2.1)，(2.2) 和(2.3)，其中 $\gamma = 1$. 因而算子 U 是一个 Calderon-Zygmund 算子.

我们要证明 $U(1) = 0$ 和 ${}^tU(1) = 0$. 这两个验证悉由引理 3 得到. 我们使用以下列方式定义的 U 的逼近 $U_m, m \in \mathbb{N}$.

用 Λ_m 表示 Λ 的有穷子集的一个增加序列，其并集为 Λ，以分布核 $S_m(x,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda_m} \tilde{\psi}_\lambda(x)\bar{\psi}_\lambda(y)$ 定义 U_m. 那么 $S_m(x,y)$ 关于 m 一致地满足条件 (2.1)，(2.2) 和(2.3)，并且 U_m 强收敛到 U. 由于 $\int \psi_\lambda(y)dy = 0$，我们有 $U_m(1) = 0$，同理验证 ${}^tU_m(1) = 0$，由此推出 $U(1) = 0$ 和 ${}^tU(t) = 0$. 再由定理 3，即得所要证的等价性.

这类论证有许多变形. 例如可用来证明小波 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，组成 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的无条件基(假如我们尚不知道这一事实). 对所有有界序列 $m(\lambda), \lambda \in \Lambda$，考虑算子 M_1，$\psi_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 是它的特征函数，而 $m(\lambda)$ 是特征值. 这次依然像前面一样，M 是一个 Calderon-Zygmund 算子，并且 $M(1) = {}^tM(1) = 0$，从而 M 可以扩张为 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 内的一个连续线性算子. 由此推断出蕴含关系：$\sum \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \in H^1 \Rightarrow \sum m(\lambda)\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \in H^1$，这一蕴含关系推出 $\psi_\lambda(x)$ 组成 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的一个无条件基.

还可从空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 推广到其它函数空间 B. 设 Calderon-Zygmund 算子 T 满足 $T(1) = {}^tT(1) = 0$，可以扩张为从 B 到 B 内的连续线性算子，并设 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的所有矩为零的函数的子空间 $\mathscr{S}_0$ 在 B 中稠密，那么小波 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，组成 B 的一个无条件基.

按照同一方案，可以证明(假定尚不知道) ψ_λ 组成 Hardy 空间

$H^p(\mathbb{R}^n)$ 的一个无条件基，这里 ψ_λ来自 r- 正则的多分辨率分析，并且 $n\left(\frac{1}{p}-1\right)<r$，条件 $M^*(x^\alpha)=0, |\alpha|\leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)$，由小波的相消性质（见第 3 章第 7 节）得到. 算子 M 由 $M(\psi_\lambda)=m(\lambda)\psi_\lambda$定义，其中 $m(\lambda)\in l^\infty(\Lambda)$.

5. 对于 Calderon-Zygmund 算子的逐点估计

本节目的之一是定义（如果有可能的话）一个 Calderon-Zygmund 算子作为一个奇异积分的主值，即欲知是否对所有 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 和几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$有

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)dy. \tag{5.1}$$

根据我们的经验，为证(5.1)，一开始总要对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密向量子空间 V 建立(5.1). 最经常的是取 $V=\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. 但在 Cauchy 核 $(z(x)-z(y))^{-1}$的情形，其中 $z(x)=x+ia(x)$, $-M\leqslant a'(x)\leqslant M$，应取 $V=\{f(x)z'(x); f\in\mathscr{D}(\mathbb{R})\}$.

一旦在特殊情形下建立了(5.1)，进而研究与 (5.1)相应的极大算子是适宜的 ([219]).

为了构造这个极大算子，比较方便的作法是，对 $\varepsilon>0$ 定义截断核 $K_\varepsilon(x,y)=K(x,y)$，当 $|x-y|\geqslant\varepsilon$时，而 $K_\varepsilon(x,y)=0$，对其余的 x,y. 而后 T_ε由显然的关系 $T_\varepsilon f(x)=\int K_\varepsilon(x,y)f(y)dy$ 给出，最后对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，定义 $(T_*f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|$，算子 T_*是 次线性的.

更精确地说，若 f 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个函数，T_*f 是一个正的可测函数，并且有 $T_*(\lambda f)=|\lambda|T_*(f)$ 和 $T_*(f_1+f_2)\leqslant T_*(f_1)+T_*(f_2)$.

算子 T_*在下述意义下“控制”算子 T.

引理 4　设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，则存在一个常数 C，使对所有函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，对所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$|Tf(x)|\leqslant T_*f(x)+C|f(x)|. \tag{5.2}$$

事实上，命题 1 提供了一个趋于 0 的序列 ε_j 和一个函数 $m(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，使对属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数 f 和 g 有

$$\langle Tf,g\rangle=\lim_{j\to\infty}\langle T_{\varepsilon_j}f,g\rangle+\langle mf,g\rangle,$$

这表明，若令 $C=\|m\|_\infty$，则有

$$\left|\int Tf(y)g(y)dy\right|\leqslant\int T_*f(y)|g(y)|dy+C\int|f(y)||g(y)|dy. \tag{5.3}$$

然后固定 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 f，由构成恒等逼近的一个序列 g_m 代替 g，$g_m(y)=m^n g(m(y-x))$，g 是一个非负连续函数，有紧支集且积分为 1，在(5.3)中令 m 趋于无穷过渡到极限即得(5.2).

我们的意图是建立一个逐点不等式，由于它与(5.2)反向而更显深刻.

为表达我们的结果，最好对局部可积函数 f 定义 Hardy 和 Littlewood 极大函数 $f^*(x)$，令

$$f^*(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|dy, \tag{5.4}$$

其中上确界是对包含 x 体积为 $|B|$ 的所有球 B 的集合取的. 同样考虑由 $\sup\limits_{\varepsilon>0}\dfrac{1}{c(n)\varepsilon^n}\displaystyle\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|f(y)|dy$ 定义的中心极大函数 f_c^*，其中 $c(n)$ 是单位球的体积. 显然有 $f^*(x)\geqslant f_c^*(x)$，但不难证明 $f^*(x)\leqslant 2^n f_c^*(x)$. 于是从积分论的观点看来，两个定义是等价的.

我们承认下列经典结果([126],[127]).

定理 4　次线性算子 $M:f\to f^*$ 具有下列性质：对所有函数 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $\lambda>0$，

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; f^*(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{C(n)}{\lambda} \| f \|_1, \tag{5.5}$$

若 $1 < p < 2$ 且 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，则 $\| f^* \|_p \leqslant \frac{C(n)}{p-1} \| f \|_p$，

$$\tag{5.6}$$

而若 $2 \leqslant p \leqslant \infty$，则 $\| f^* \|_p \leqslant C(n) \| f \|_p$. (5.7)

现在我们达到了本节的基本结果，即 M. Cotlar 定理.

定理 5 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，(2.1)，(2.2)，(2.3) 和(2.4)中的相应常数 $C_0 = C_1 = C_2 = 1$，则对所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 和所有 $x \in \mathbb{R}^n$有逐点不等式

$$T_* f(x) \leqslant 2(Tf)^*(x) + C(n,\gamma) f^*(x). \tag{5.8}$$

显然我们可限于点 $x=0$. 证明建立在两个引理的基础上.

引理 5 对所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，所有 $r > 0$ 和所有 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\varepsilon^\gamma \int_{|y| \geqslant \varepsilon} |y|^{-n-\gamma} |f(y)| dy \leqslant C f^*(0), \tag{5.9}$$

其中常数 $C = C(n,\gamma)$ 仅依赖于 $\gamma > 0$ 和维数.

为建立这个不等式，我们把积分区域分解为二进环形 $\Gamma_k = \{2^k \varepsilon \leqslant |y| < 2^{k+1}\varepsilon\}$，$k \in \mathbb{N}$. 注意 $\Gamma_k \subset B_{k+1}$，B_k是球 $|y| \leqslant 2^k\varepsilon$. 然后对每个球 B_k利用极大函数的定义. 计算是直接的并且(在第 2 章(6.7) 的证明中) 已经作过.

引理 6 对所有 Calderon-Zygmund 算子 T，存在一个常数 C，使对所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，所有 $x \in \mathbb{R}^n$，所有 $\varepsilon > 0$ 和所有 $x' \in \mathbb{R}^n$，只要 $|x' - x| \leqslant \varepsilon/2$，就有 $|T_\varepsilon f(x') - T_\varepsilon f(x)| \leqslant C f^*(x)$.

首先从上估计 $\left|\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}(K(x',y)-K(x,y))f(y)dy\right|$.

为此，我们利用 (2.2)和(5.9)，然后必须比较 $\int_{|x'-y|\geqslant\varepsilon}K(x',y)f(y)dy$ 和 $\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x',y)f(y)dy$. 而当 $|x'-x|\leqslant\varepsilon/2$ 时，集 $|x'-y|\geqslant\varepsilon$ 和 $|x-y|\geqslant\varepsilon$ 的对称差含于环形 $\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|x'-y|\leqslant\frac{3\varepsilon}{2}$（由对称性，也含于环形 $\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|x-y|\leqslant\frac{3\varepsilon}{2}$），于是可把 $|K(x',y)|$ 放大为 $2^n C_0\varepsilon^{-n}$，而后两上积分的差放大为 $Cf^*(x)$.

现在回到 Cotlar 不等式的证明. 设 $\varepsilon>0$，T_ε 是相应截断算子，B 是球 $|x|\leqslant\varepsilon/2$，$\widetilde{B}$ 是其二倍球，而 f_1 是 f 同 $\widetilde{B}$ 的指示函数的乘积.

我们要证明对所有 $\varepsilon>0$ 有

$$|T_\varepsilon f(0)|\leqslant 2(Tf)^*(0)+Cf^*(0). \tag{5.10}$$

在(5.10)左端关于 $\varepsilon>0$ 取上确界即得 Cotlar 不等式.

现证 (5.10). 我们注意 $T_\varepsilon f(0)=Tf_2(0)$. 我们要把这个值与 B 上其它的值 $Tf_2(x)$ 比较.

由引理 6，对所有 $x\in B$，

$$|Tf_2(x)-Tf_2(0)|<C(n,\gamma)f^*(0). \tag{5.11}$$

为返回 $T_\varepsilon f(x)$，对几乎所有的 $x\in B$ 写出等式 $Tf_2(x)=Tf(x)-Tf_1(x)$，(5.11) 就变为对几乎所有的 $x\in B$，

$$|Tf_2(0)|\leqslant|Tf(x)|+|Tf_1(x)|+C(n,\gamma)f^*(0). \tag{5.12}$$

为得到结论，我们要估计(5.12)两端相对于球 B 上的均分测度 μ 的"弱 L^1 范数"，μ 的支集在 B 内并且在 B 上有常数密度 $|B|^{-1}$. 设 $f:B\to\mathbb{C}$ 是一个可测函数，令 $N(f)=\sup\limits_{\lambda>0}(\lambda\mu\{x\in B;|f(x)|>\lambda\})$. 若在 B 上 $|f|\leqslant|g|$，显然有 $N(f)\leqslant N(g)$. 若 $f(x)$ 等于一个常数 $\alpha>0$，则有 $N(f)=\alpha$. 还有，若 f_1，f_2 和 f_3 是 B 上的三个可测函数，则有

$$N(f_1+f_2+f_3)\leqslant 2N(f_1)+4N(f_2)+4N(f_3).$$

作了这些注释，就把 (5.12) 变换成

$$|Tf_2(0)|\leqslant 2N(Tf)+4N(Tf_1)+4C(n,\gamma)f^*(0).$$

为从上估计 $N(Tf)$，我们简单地利用 Bienaymé-Tchbitcheff 不等式即可得到

$$N(Tf)\leqslant \|Tf\|_{L^1(d\mu)}=|B|^{-1}\int_B |Tf(y)|dy\leqslant (Tf)^*(0).$$

致于 Tf_1，利用定理 1 即得 $N(Tf_1)=\sup\limits_{\lambda>0}(\lambda\mu\{x\in B;|Tf_1|>\lambda\})\leqslant C|B|^{-1}\|f_1\|_1\leqslant 2^nCf^*(0)$. 这就完全证明了 Cotlar 不等式.

推论 若 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，则当 $1<p<\infty$ 时，只要 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，就有 $T_*f\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

我们要阐明怎样从这一结果证明，对某些 Calderon-Zygmund 算子，当 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 并且 $1<p<\infty$ 时，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，极限 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)dy=Lf(x)$ 的存在性. T 和 L 的联系则由 $Tf=Lf+mf$ 给出，这里 $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

假定存在一个稠密向量子空间 $V\subset L^p(\mathbb{R}^n)$，使得当 $f\in V$ 时，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，$Lf(x)$ 存在.

我们要证明当 $1<p<\infty$ 时，对所有函数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$Lf(x)$ 存在. 为此，对 $f\in L^p$，令 $g_\varepsilon(x)=\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)dy$，并定义

$$\omega(f;x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\sup_{0<s<t<\varepsilon}|g_t(x)-g_s(x)|\Big). \qquad (5.13)$$

今证对所有函数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$Lf(x)$ 几乎处处存在，即要证明几乎处处 $\omega(f;x)=0$，或对所有 $\alpha>0$，$|\{x\in\mathbb{R}^n;\omega(f;x)>\alpha\}|=0$.

我们要利用 $\omega(f;x)$ 的下列三个显然的性质

$$\omega(f_1+f_2;x)\leqslant\omega(f_1;x)+\omega(f_2;x),$$

$$\omega(f;x)\leqslant 2T_*f(x),$$

以及

$$\omega(f;x)=0,\text{若 } f\in V.$$

假定 f 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$，固定 $\alpha>0$，而要验证 $|\{x\in\mathbb{R}^n;\ \omega(f;x)>\alpha\}|=0$. 为此，考虑一个数 $\beta>0$，将令它趋于 0. 设 $g\in V$ 是一个满足 $\|f-g\|_p\leqslant\beta$ 的函数. 于是有

$$\omega(f;x)\leqslant\omega(f-g;x)+\omega(g;x)=\omega(f-g;x),$$

从而

$$|\{x;\omega(f;x)>\alpha\}|\leqslant\alpha^{-p}\|\omega(f-g)\|_p^p$$
$$\leqslant 2^p\alpha^{-p}\|T_*(f-g)\|_p^p\leqslant C^p\alpha^{-p}\beta^p.$$

令 $\beta\to 0$ 即得结论.

请看几个例子.

首先假定核 $K(x,y)$ 在所有以 x 为中心的球上的均值为零. 第一代 Calderon-Zygmund 算子卷积的核就是这种情形. 这时对所有 C^1 类有紧支集的函数 f，极限 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)dy$ 存在. 事实上，当 R 充分大时，积分可写成 $\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant k}K(x,y)f(y)dy$，再写成 $\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant k}K(x,y)(f(y)-f(x))dy$，由于这一积分绝对收敛，可令 $\varepsilon>0$ 趋于 0.

一个更精细的例子，在一维情形，由 Calderon 的第一个交换子给出，将在第 9 章系统地研究. 从一个 Lipschitz 函数 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 出发构造反对称核 $K(x,y)=\dfrac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}$. 那么，若 f 是 C^1 类的并且有紧支集，则有

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)dy$$
$$=\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}K(x,y)f(y)dy+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}K(x,y)f(y)dy.$$

为计算每一个积分，再进行分部积分，并注意到 $\frac{d}{dy}(x-y)^{-1}=(x-y)^{-2}$. 设 $a\in L^\infty$是 A 的导数，我们有

$$
\begin{aligned}
T_\varepsilon f(x)=&\frac{A(x)-A(x-\varepsilon)}{\varepsilon}f(x-\varepsilon)\\
&-\frac{A(x+\varepsilon)-A(x)}{\varepsilon}f(x+\varepsilon)\\
&+\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{a(y)f(y)}{x-y}dy-\\
&\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\frac{A(x)-A(y)}{x-y}f'(y)dy.
\end{aligned}
$$

由于 $a\in L^\infty$，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\frac{A(x+\varepsilon)-A(x)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}a(t)dt\to a(x).$$

其实为得上述等式，只假定 $a(x)$局部可积就可以了.

Hilbert 变换 H 是第一代 Calderon-Zygmund 算子. 若 $a\in L^\infty$，f 连续且有紧支集，那么 af 属于 $L^2(\mathbb{R})$，由第一个例子即得上式中的截断积分收敛到 $H(af)$. 由于 $\left|\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right|\leqslant\|a\|_\infty$，上式中的最后一个积分绝对收敛.

一旦证明了算子 $Tf=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}T_\varepsilon f$ 的 L^2连续性，就能得到所要的结论.

最后一个例子由 Lipschitz 图象上的 Cauchy 核提供，在下面的计算中，$\log z$ 表示对数的一个分支，它定义在除去连结 0 和 $-i\infty$ 的半直线的 $\mathbb{C}$ 上，并在 1 取值为零. 把一个 Lipschitz 函数 $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的图象记为 Γ，并令 并令 $z(x)=x+ia(x)$.

我们要验证对 C^1 类的所有有紧支集的函数 $f(x)$，$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}(z(x)-z(y))^{-1}z'(y)f(y)dy$ 存在. 为此，引进辅助函数 $F(y)=\log(z(y)-z(x))$，它在 Γ 上除去 $z(x)$ 外有意义. 我们有 $F'(y)=\frac{z'(y)}{z(y)-z(x)}$，进而

$$\int_{|x-y|\geq\varepsilon}(z(x)-z(y))^{-1}z'(y)f(y)dy$$
$$=-\int_{|x-y|\geq\varepsilon}F'(y)f(y)dy$$
$$=\log(z(x+\varepsilon)-z(x))f(x+\varepsilon)$$
$$-\log(z(x-\varepsilon)-z(x))f(x-\varepsilon)$$
$$+\int_{|y-x|\geq\varepsilon}\log(z(y)-z(x))f'(y)dy.$$

对几乎所有的 x 我们有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{z(x+\varepsilon)-z(x)}{\varepsilon}=z'(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{z(x)-z(x-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

由此推出积出的项几乎处处收敛到 $-\pi i f(x)$，而积分 $\int\log(z(y)-z(x))f'(y)dy$ 绝对收敛.

在最后一例中，核 $K(x,y)$ 定义算子 T 是通过分布 v. p. $(z(x)-z(y))^{-1}$ 迂回实现的. 稠密子空间 $V\subset L^2(\mathbb{R})$ 是乘积 $z'f$ 的集合，其中 f 是一个有紧支集的 C^1 类函数. 自然仅在证明问题中的算子的 L^2 连续性后，才能应用 Cotlar 不等式.

6. Calderon-Zygmund 算子和奇异积分

Cotlar 不等式使我们得以给下列问题以完全的回答：若 T 是一个核为 $K(x,y)$ 的 Calderon-Zygmund 算子，能否仅用核 K 构造算子？

第一个回答已经给出，设 $\theta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个辐射函数，它当 $|x|\geq 2$ 时等于 1，而当 $|x|\leq 1$ 时等于 0. 对所有 $\varepsilon>0$ 作截断核 $K_\varepsilon(x,y)=\theta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)K(x,y)$，并把借助这个核定义的算子叫作 T_ε. 于是存在一个趋于 0 的序列 $\varepsilon_j>0$，使 T_{ε_j} 弱收敛于一个 Calderon-Zygmund 算子 L，并且 $T=L+M$，M 是由一个函数 $m(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 作的逐点乘法算子，T 和 L 的核是相等的，显然

从 $K(x,y)$ 出发将对 $m(x)$ 一无所知.

甚至在最简单的例子中也迫不得已过渡到一个子序列.

考虑算子 $M_\gamma = (-\Delta)^{i\gamma/2}, \gamma \in \mathbb{R}$，它通过 Fourier 变换由 $(M_\gamma f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{i\gamma}\hat{f}(\xi)$ 定义. 若 $\gamma \neq 0$，M_γ的核 $K(x,y)$ 是 $c(n,\gamma)|x-y|^{-n-i\gamma}$. 若 f 是一个有紧支集的 C^1类函数，$\lim\limits_{\epsilon_j \downarrow 0}\int_{|x-y|\geq\epsilon_j}|x-y|^{-n-i\gamma}f(y)dy$ 的存在性等价于 $\epsilon_j^{-i\gamma}$极限的存在性. 为看出这一事实，只须对充分大的 R，把积分区域换为 $\epsilon_j \leq |x-y| \leq R$，再作分解 $f(y) = f(y) - f(x) + f(x)$.

最后可得，算子序列 T_{ϵ_j} 弱收敛，当且仅当 $\epsilon_j^{-i\gamma}$趋向于一个极限，即 $\frac{\gamma}{2\pi}\log\epsilon_j$模 1 收敛.

另一精心推敲的例子后面将会用到. 考虑由象征 $\sigma(x,\xi) = (1+\xi^2)^{i\alpha(x)/2}$ 定义的伪微分算子 $\sigma(x,D)$，其中 $\alpha(x) = 2 + \sin x$，$x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$. 这一象征属于所有 Hömander 类 $S^0_{1,\rho}$([68]，第 2 章)，因此，相应算子 $\sigma(x,D)$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子，$\sigma(x,D)$ 的核是一个主项 $K_0(x,y)$ 和一个误差商 $K_1(x,y)$ 的和 $K(x,y)$. 主项是

$$K_0(x,y) = \gamma(x)|x-y|^{-1-i\alpha(x)},$$

其中

$$\gamma(x) = -2i\Gamma(1+2i\alpha(x))\operatorname{sh}\pi\alpha(x),$$

Γ 是 Euler 的 Gamma 函数.

误差项 $K_1(x,y)$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，不会引出奇异积分.

假定存在一个趋于 0 的序列 $\epsilon(j) > 0$，使对每个有紧支集的 C^1 类函数 f，$\int_{|x-y|\geq\epsilon(j)}K(x,y)f(y)dy$ 几乎处处收敛. 这个极限的存在性等价于 $\exp(-i\alpha(x)\log\epsilon(j))$ 极限的存在性.

为指出这个函数序列不几乎处处收敛，只须利用下列引理([239]，p. 316).

引理 7 设 λ_j是一个绝对值趋于无穷的实数序列，则使 $e^{it\lambda_j}$趋于极限的实数 t 的集合 E 是一个零测集.

为验证这一事实，用 $f(t)$ 表示函数序列 $e^{it\lambda_j}$在 E 上的极限. 由 Lebesgue 控制收敛定理得知，对所有紧区间 $[a,b]$ 有

$$\int_a^b e^{it\lambda_j}\chi_E(t)dt \to \int_a^b f(t)\chi_E(t)dt, \tag{6.1}$$

上式中 χ_E表示 E 的指示函数. 再注意到(6.1)左端是 $E\cap[a,b]$ 的指示函数的 Fourier 变换在 $-\lambda j$ 的值，该指示函数属于 $L^1(\mathbb{R})$，Riemann-Lebesgue 定理蕴含(6.1)的极限是零. 于是对所有 $a\in\mathbb{R}$ 和 $b>a$，$\int_a^b f(t)\chi_E(t)dt=0$. 由此得几乎处处有 $f(t)\chi_E(t)=0$，而在 E 上 $|f(t)|=1$，即得结论 $|E|=0$.

再返回基本问题：计算一个 Calderon-Zygmund 算子 T 对一个函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的作用结果，要求借助 v. p. $\int K(x,y)f(y)dy$ 的推广，而 K 是与 T 相应的核.

用 T_ϵ表示对 $\epsilon>0$，由 $T_\epsilon f(x)=\int_{|x-y|\geq\epsilon}K(x,y)f(y)dy$ 定义的算子. 定理 5 告诉我们算子 T_ϵ组成 $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n,L^2(\mathbb{R}^n))$ 的一个有界子集，因此可以找到趋于 0 的序列 ϵ_j使 T_{ϵ_j}弱收敛于一个算子 L. 这时 L 是一个 Calderon-Zygmund 算子，其核正是 $K(x,y)$. 而 $T=L+M$，这里 M 是与一个函数 $m(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 相乘的逐点乘法算子.

于是，若 f 和 g 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，有积分表示公式

$$(Tf,g)=\lim_{\epsilon_j\downarrow 0}\int_{|x-y|\geq\epsilon_j}K(x,y)f(y)g(x)dydx + \int m(x)f(x)g(x)dx. \tag{6.2}$$

我们可以进一步要求知道当 ϵ_j趋于 0 时，$T_{\epsilon_j}f(x)$ 的几乎处处收敛性. 我已看到这就应当以函数 $\epsilon_j(x)$ 代替常数 ϵ_j. 这些注释

引来下列表述.

定理 6 设 $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子，则存在一个 $\mathbb{R}^n$ 上的严格正值的可测函数序列，满足 $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j(x) = 0$，又存在一个函数 $m(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得对所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 我们有对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$成立

$$Tf(x) = m(x)f(x) + \lim_{j\to+\infty}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon_j(x)} K(x,y)f(y)dy. \tag{6.3}$$

正如我们曾经看到的，定理 6 是可能有的最好结果. 事实上这仅是 Cotlar 定理的转述.

为证定理 6，引进序列 $m_j(x)$，$j \in \mathbb{N}$，$m_j(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$上的连续函数，其定义是 $m_j(x) = \int_{1/j\leqslant|x-y|\leqslant 1} K(x,y)dy$.

若 T 是一个卷积算子，则 $m_j(x)$ 是常数，并且由 Cotlar 定理知这些常数组成一个有界序列.

定理 6 容易从下列引理导出.

引理 8 存在一个在 $\mathbb{R}^n$上可测在 $\mathbb{N}$ 取值的序列 $j_q(x)$，$q\in\mathbb{N}$，使对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，$\lim_{q\to\infty} j_q(x) = \infty$，并且 $\lim_{q\to\infty} m_{j_q}(x)$ 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$存在.

暂时承认这个引理，先来证明定理 6.

令 $\varepsilon_q(x) = (j_q + 1)^{-1}$，首先对有紧支集的 C^1类函数，证明序列

$$g_q(x) = \int_{|x-y|\geqslant\varepsilon_q(x)} K(x,y)f(y)dy. \tag{6.4}$$

收敛到一个函数 g，收敛性对几乎处处和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 皆成立. 算子 L

将由 $g=Lf$ 定义，而 $T-L$ 将是与 $m(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 相乘的乘法算子.

为验证几乎处处收敛性，我们写下

$$
\begin{aligned}
g_q(x) = f(x)&\int_{\varepsilon_q(x)\leqslant|x-y|\leqslant 1} K(x,y)dy \\
&+\int_{\varepsilon_q(x)\leqslant|x-y|\leqslant 1} K(x,y)(f(y)-f(x))dy \\
&+\int_{|x-y|\geqslant 1} K(x,y)f(y)dy.
\end{aligned}
$$

第一个积分正是 $f(x)m_{j_q}(x)^{(x)}$，其收敛性由引理 8 保证. 由于 f 是 C^1 类的. 第二个积分绝对收敛，由于 f 有紧支集，第三个积分收敛.

利用第 6 节的方法过渡到任意函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

留下的只是引理 8 的证明.

首先验证几乎处处 $\sup_{j\geqslant 1}|m_j(x)|<\infty$.

用 $R\geqslant 1$ 表示任意整数，而限制在 $|x|\leqslant R$ 考虑. 满足 $|x|\leqslant R$ 且使 $\sup_{j\geqslant 1}|m_j(x)|=\infty$ 的例外点的零测集的并集将仍是零测集.

用 $\chi(x)$ 表示球 $|x|\leqslant R+1$ 的指示函数，那么 $m_j(x)=T_{(j+1)^{-1}}\chi(x)-r(x)$，这里 $r(x)=\int_{1\leqslant|x-y|\leqslant R+1}K(x,y)dy$; R 固定时 $r(x)$ 有界. Cotlar 定理给出

$$\sup_{j\geqslant 1}|m_j(x)|<\infty \qquad \text{a. e.}$$

至此，可以完全忘记 $m_j(x)$ 的来历，而应用下列引理.

引理 9 设 $m_j(j\in\mathbb{N})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个取实值或复值的可测函数序列，$\sup_{j\geqslant 1}|m_j(x)|$ 几乎处处有穷. 则存在一个在 $\mathbb{N}$ 中取值的趋于无穷的可测函数序列 $j_q(x)$，使当 q 趋于无穷时，$m_{j_q(x)}(x)$ 几乎处处收敛.

为了证明引理，首先考虑 $m_j(x)$ 的实部，这导致第一次抽取子序列，再对虚部从第一个子序列抽取第二个子序列.

于是可设 $m_j(x)$ 是实的，令 $m_j^*(x) = \sup_{k\geqslant 0} m_{j+k}(x)$，而用 $j_q = j_q(x)$ 表示使 $m_j(x) \geqslant \limsup m_k(x) - \frac{1}{q}$ 的最小整数 $j \geqslant q$. 于是 $m_q^*(x) \geqslant m_{j_q}(x) \geqslant \limsup m_k(x) - \frac{1}{q}$，这就保证了函数序列 $m_{j_q(x)}(x)$ 收敛到 $\overline{\lim} m_k(x)$.

7. 精确化 Cotlar 不等式

本节用来改进定理 5，这一改进在第 8 节证明“好 λ 不等式”的精确化不等式时将会用到.

为此，我们要利用 Hardy-Littlewood 极大函数的一个变种，其定义是，若 $0 < \delta \leqslant 1$，

$$M_\delta f(x) = \sup_{B \ni x}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta}.$$

采用这一记号，就有

定理 7 对 $0<\gamma\leqslant 1, 0<\delta\leqslant 1$，存在一个常数 $C(n,\gamma,\delta)$，使得若 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，其中(2.1)，(2.2)，(2.3)和(2.4)中的 $C_0 = C_1 = C_2 = 1$，则对所有 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$T_* f(x) \leqslant 3M_\delta(Tf)(x) + C(n,\gamma,\delta) f^*(x). \qquad (7.1)$$

定理 7 的证明沿着定理 5 的同样的一般思路，只是那里的“弱 L^1 范数”估计要由下面的 Kolmogoroff 不等式精确化.

引理 10 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是一个属于弱 L^1 的函数，令

$$\theta = \sup_{\lambda>0} |\{x; |f(x)| > \lambda\}|, \qquad (7.2)$$

则对所有测度 $|E|$ 有穷的 Borel 子集 $E\subset\mathbb{R}^n$有

$$\int_E |f|^\delta dx \leqslant C(n,\delta)|E|^{1-\delta}\theta^\delta. \tag{7.3}$$

现转向(7.1)的证明. 重新从(5.12)出发,两边求 δ 次幂,再取球 B 上的均值,我们得到

$$|Tf_2(0)| \leqslant 3[M_\delta(Tf)](0) + 3\varepsilon^{-n/\delta}\left(\int_B |Tf_1|^\delta\right)^{1+\delta} + Cf^*(0). \tag{7.4}$$

利用 Kolmogoroff 不等式和 $T:L^1(\mathbb{R}^n)\to$弱 L^1的连续性,我们估计出现在 (7.4)右端的积分,得到

$$\int_B |Tf_1|^\delta dx \leqslant C(n,\delta)\varepsilon^{n-n\delta}\|f_2\|_1^\delta \leqslant C(n,\delta)\varepsilon^n(f^*(0))^\delta,$$

这就结束了证明.

为了证明 Kolmogoroff 不等式,显限可以限于 $\theta=1$ 的情形. 对所有 $k\in\mathbb{Z}$,定义 $E_k=\{x\in\mathbb{R}^n;|f(x)|>2^k\}$,并把使 $2^{-k}\geqslant|E|$ 的最大整数记作 k_0.

当 $k<k_0$,把 $|E_k|$ 放大为 $|E|$,而当 $k\geqslant k_0$,把 $|E_k|$ 放大为 2^{-k}(第二种情形利用了 $\theta=1$). 于是

$$\int_E |g|^\delta dx \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)\delta}|E_k|$$

$$\leqslant 2^\delta|E|\sum_{-\infty}^{k_0-1}2^{k\delta} + 2^\delta\sum_{k_0}^{\infty}2^{-k(1-\delta)} \leqslant C_\delta 2^{-k_0(1-\delta)}.$$

请看精确化 Cotlar 不等式的第一个应用.

定理 8 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子,而 T_*是相应极大算子. 则对所有函数 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$,$T_*(f)$属于弱 L^1.

跟前面一样,设 $f\in L^1\cap L^2$,尔后由定理 1 证明中用的稠密性推理处理 $f\in L^1$的一般情形. 我们假设(像对定理 7 一样) $C_0=C_1$

$=C_2=1$，并设 $\|f\|_1=1$. 再利用(7.1)和 Hardy-Littlewood 的经典定理(若 $f\in L^1$，则 $f^*\in$ 弱 L^1). 然后只须验证当 $0<\delta<1$ 时，$M_\delta(Tf)$ 属于弱 L^1.

为此，首先注意 $M_\delta(Tf)\leqslant(Tf)^*\in L^2$，只要 $f\in L^2$ 并且 $0<\delta<1$. 这时集合 $E=\{x\in\mathbb{R}^n;M_\delta(Tf)>\lambda\}$ 有有穷测度. 暂时承认下列引理.

引理 11 设 g 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的一个函数，$\lambda>0$，而 $E=\{x;g^*(x)>\lambda\}$. 则有

$$|E|\leqslant C_n\lambda^{-1}\int_E|g(x)|dx, \tag{7.5}$$

其中 C_n 是一个仅依赖于 n 的常数.

不等式(7.5)精确化了 Hardy 和 Littlewood 定理，这表现在(7.5)的右端以 $\int_E|g(x)|dx$ 代替了 $\|g\|_1$. 在我们这里，这就给出

$$|E|=|\{x;(|Tf|^\delta)^*>\lambda^\delta\}|\leqslant C_n\lambda^{-\delta}\int_E|Tf|^\delta dx.$$

再次援引 Kolmogoroff 不等式即得 $\int_E|Tf|^\delta dx\leqslant C|E|^{1-\delta}$；这是由于 Tf 属于弱 L^1，以及 $\|f\|_1=C_0=C_1=C_2=1$.

于是 $|E|\leqslant C'\lambda^{-\delta}|\mathbb{E}|^{1-\delta}$，由于 $|E|<\delta$，结论即得. 定理 8 证明完毕.

为证引理 11，若 $x\in E$，令 $h(x)=g(x)$，对其余的 x 令 $h(x)=0$. 我们有 $\{x;g^*(x)>\lambda\}=\{x;h^*(x)>\lambda\}$. 事实上，$g^*(x)\geqslant h^*(x)$，从而 $h^*(x)>\lambda$ 蕴含 $g^*(x)>\lambda$. 为证反向蕴含，用 B 表示以 x 为中心的满足 $\int_B|g(y)|dy>\lambda|B|$ 的球. 对所有 $x'\in B$，有 $g^*(x')>\lambda$，从而 B 含于 E. 于是在 B 上 $h(x)=g(x)$，这就蕴含 $h^*(x)>\lambda$. 随之

$$|E| = |\{x; h^*(x) > \lambda\}| \leqslant C_n\lambda^{-1} \|h\|_1 = C_n\lambda^{-1}\int_E |g(x)|dx.$$

推论 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子. 假定存在一个在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密的子空间 V,使对所有 $f \in V$ 有

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} K(x,y)f(y)dy = Tf(x) \tag{7.6}$$

对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立,则当 f 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 时,(7.6) 同样对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立.

8. 好 λ 不等式和 Muckenhoupt 权

Cotlar 不等式另一值得注意的推论是,当 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子时,用 Hardy 和 Littlewood 极大函数 f^*"以测度控制"极大算子 T_*f 的可能性.

为使定理更有用,我们把参照测度 dx 换成 $\omega(x)dx$,$\omega(x)>0$ 是一个 Borel 函数,它满足 Muckenhoupt 的 A_∞ 条件.

定义 4 设 $\omega: \mathbb{R} \to]0,\infty[$ 是一个 Borel 局部可积函数. 对所有 Borel 子集 $E \subset \mathbb{R}^n$,令 $\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$. 我们说 ω 满足 Muchenhoupt 的 A_∞ 条件,如果存在一个指数 $\delta \in]0,1]$ 和一个常数 C,使得对所有方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 和所有 Borel 子集 $E \subset Q$ 有

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leqslant C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta. \tag{8.1}$$

下述结果是由 Burkhoder 和 Gundy 在鞅论框架内引入的著名不等式在 Calderon-Zygmund 算子情形下的类似.

定理 9 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子,而 ω 是一个

A_∞权.则存在一个指数 $\delta>0$ (和(8.1)中的相同),一个常数 C 和一个数 $\gamma_0>0$,使下列性质成立:对所有连续且有紧支集的函数 f,所有 $\lambda>0$ 和所有 $\gamma\in]0,\gamma_0]$,有

$$\omega\{x \in \mathbb{R}^n; T_* f(x) > 2\lambda \text{ 且 } f^*(x) \leqslant \gamma\lambda\} \leqslant C\gamma^\delta \omega\{x \in \mathbb{R}^n; T_* f(x) > \lambda\}. \tag{8.2}$$

我们将看到(8.2)的某些应用.先来建立这个"好 λ 不等式".

第一个注释是 $T_* f(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)|$ 是一个下半连续函数.因此集合 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; T_* f(x) > \lambda\}$ 是开集.由于在无穷远 $T_* f(x) = O(|x|^{-n})$(由对 f 加的条件推出),Ω 是一个有界开集.因此,Ω 是不相交的(若不计零测集)二进方体 $Q_j \subset \Omega$ 的并集,其中的方体对包含关系是最大的.用 $\tilde{Q}_j$表示 Q_j的"父亲",即包含 Q_j且直径为 Q_j的二倍的二进方体.这样 $\tilde{Q}_j$不含于 Ω,从而存在一点 $\alpha_j \in \tilde{Q}_j$不属于 Ω.

令 $|x| = \sup(|x_1|, \cdots, |x_n|), x \in \mathbb{R}^n$,于是 Q_j由 $|x - \beta_j| \leqslant d_j/2$ 定义,β_j是 Q_j的中心.从而 $T_* f(\alpha_j) \leqslant \lambda$,并且 $|\alpha_j - \beta_j| \leqslant 2d_j$.

再把诸 Q_j分类成两个集族,用 $J \subset \mathbb{N}$ 表示 Q_j包含一个满足 $f^*(\xi_j) \leqslant \gamma\lambda$的点 ξ_j的指标 j 的集合.对 $j \notin J$,由 $T_* f(x) > 2\lambda$ 和 $f^*(x) \leqslant \gamma\lambda$ 定义的集 E 不与 Q_j相交.由于 E 含于 Ω,我们有 $E \subset \bigcup Q_j$,从而 $\omega(E) = \sum\limits_{j\in J} \omega(E \cap Q_j)$.

对所有 $j \in J$,用 E_j表示使 $T_* f(x) > 2\lambda$ 的 $x \in Q_j$的集合.

我们要证明,对所有 $j \in J$ 有

$$|E_j| \leqslant C\gamma |Q_j|, \text{若 } 0 < \gamma < \gamma_0. \tag{8.3}$$

再利用(8.1)即得到

$$\omega(E_j) \leqslant C' \gamma^\delta \omega(Q_j). \tag{8.4}$$

把这些不等式相加即得结论.

为证(8.3),用 Q_j^* 表示与 Q_j同心并且直径为 Q_j的四倍的方

体. 把 f 分解为 f_1和 f_2, f_1是 f 与 Q_j^* 的指示函数的乘积，而 f_2在 Q_j^* 上为零.

利用跟引理 6 同样的计算可以验证，对所有 $x \in Q_j$，我们有

$$|T_* f_2(x) - T_* f_2(\alpha_j)| \leqslant Cf^*(\xi_j) \leqslant C\gamma\lambda, \qquad (8.5)$$

以及

$$T_* f_2(\alpha_j) \leqslant T_* f(\alpha_j) + Cf^*(\xi_j) \leqslant \lambda + C\gamma\lambda. \qquad (8.6)$$

于是若 $x \in Q_j$，我们有 $T_* f_2(x) \leqslant \lambda + 2C\gamma\lambda$. 从而集合 E_j含于 $E'_j = \{x \in Q_j; T_* f_1(x) > \lambda(1 - 2C\gamma)\}$. 以下设 $1 - 4C\gamma > 0$，即 $0 < \gamma < \gamma_0$. 利用定理 8 即得

$$|E'_j| \leqslant \frac{C'}{\lambda(1 - 2C\gamma)} \| f_1 \|_1 \leqslant C''\gamma |Q_j|.$$

定理 9 证毕，从它得出两个推论.

推论 1 设 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，而 ω 是一个 A_∞类权. 那么当 $0 < p < \infty$ 时，存在一个常数 C，使对所有局部可积函数 $f(x)$ 有

$$\int (T_* f)^p \omega dx \leqslant C \int (f^*)^p \omega dx. \qquad (8.3)$$

若 $0 < p \leqslant 1$ ，一般来说，(8.3) 右端不能换成 $\int |f|^p \omega dx$. 例如，若 $p = 1, \omega(x) = 1$，改变后的不等式将特别地推出 T 在 L^1 上的连续性，而其实不然.

反之，若 $p>1$，对于某些权，可以得到更精密的不等式

$$\int (T_* f)^p \omega dx \leqslant C \int |f|^p \omega dx. \qquad (8.4)$$

若 $1 < p < \infty$，定义类 $A_p \subset A_\infty$是 $\mathbb{R}^n$上局部可积、正值并存在常数 C，使对所有方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$成立

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x) dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\omega(x))^{-1/(p-1)} dx\right)^{p-1} \leqslant C \quad (8.5)$$

的函数 ω 的集合.

Muckenhoupt 证明了这一条件和次线性算子 $f \to f^*$ 从 $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ 到自身连续这一事实的等价性. 关于这一断言的证明,请参见 J. Garcia Cuerva 和 J. L. Rubio de Francia 的杰出著作([115],th. 2. 8. p. 400).

我们有

推论 2 对于 $1 < p < \infty$ 和 $\omega \in A_p$,所有 Calderon-Zygmund 算子 T 可扩张为 $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ 到自身的连续线性算子.

我们给出赖以建立 (8.3) 的计算细节. 首先建立等式

$$\int |f|^p d\mu = p\int_2^{\infty} \mu\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}\lambda^{p-1} d\lambda, \tag{8.6}$$

其中 $p > 0$,而 μ 是一个任意的正 Radon 测度. 为验证 (8.6),只须引进辅助函数 $F(x,\lambda) = \lambda^{p-1}$,若 $|f(x)| > \lambda$;$F(x,\lambda) = 0$,若 x 是其余的点,再利用 Fubini 定理计算重积分

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\infty} F(x,\lambda) d\mu(x) d\lambda.$$

(8. 6) 使我们能够利用下列引理.

引理 12 设 μ 是一个正 Radon 测度,$p > 0$ 是一个指数,u 和 v 是 $\mathbb{R}^n$上的两个 Borel 函数,满足 $\|u\|_p = (\int |u|^p d\mu)^{1/p}$ 和 $\|v\|_p$有穷. 假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 由下列“好 λ 不等式”联系:存在一个指数 $\delta > 0$,一个实数 $\gamma_0 > 0$ 和一个常数 C,使得当 $0 < \gamma < \gamma_0$ 时,对所有 $\lambda > 0$ 有

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^n; |u(x)| > 2\lambda \text{ 且 } |v(x)| \leqslant \gamma\lambda\} \leqslant C_0\gamma_\mu^\delta\{x \in \mathbb{R}^n; |u(x)| > \lambda\}. \tag{8.7}$$

则若 $C_0\gamma^\delta < 2^{-p}$,就有

$$\|u\|_p \leqslant (2^{-p} - C_0\gamma^\delta)^{-1/p}\gamma^{-1}\|v\|_p. \tag{8.8}$$

事实上，由(8.7)推出不等式

$$\mu\{|u(x)|>2\lambda\}\leqslant\mu\{|v(x)|>\gamma\lambda\}+C_0\gamma^\delta\mu\{|u(x)|>\lambda\}. \tag{8.9}$$

(8.9)两端乘以 λ^{p-1}，对 λ 积分，并利用 (8.6)即得

$$2^{-p}\|u\|_p^p\leqslant\gamma^{-p}\|v\|_p^p+C_0\gamma^\delta\|u\|_p^p.$$

由假定 $2^{-p}>C_0\gamma^\delta$，且 $\|u\|_p<\infty$，遂得结论.

为应用到 Calderon-Zygmund 算子，假定 f 是紧支集连续函数，这时在无穷远有 $T_*f(x)=0(|x|^{-n})$. 若 $1<p<\infty$，当 $\omega\in A_p$ 时，我们有 $T_*f\in L^p(\mathbb{R}^n,\omega dx)$. 若 $0<p\leqslant1$，假定 $\int_{|x|\geqslant1}|x|^{-np}\omega(x)dx<\infty$，这就保证条件 $\int(f^*)^p\omega dx<\infty$ 及当 R 充分大时 $\int_{\{|x|\geqslant R\}}(T_*f)^p\omega dx<\infty$ 得以满足. 为处理 $\int_{\{|x|\leqslant R\}}(T_*f)^p\omega dx<\infty$，利用下列引理是方便的.

引理 13 若 ω 是一个属于 A_p类的权，则对所有 $m\geqslant1$，$\omega_m(x)=\inf(m,\omega(x))$ 满足 (8.5)，其中的常数 C 不依赖于 m.

暂时承认这一结果，还是假定 f 是紧支连续函数，并以 ω_m代替 ω. 于是 $\int_{\{|x|\leqslant R\}}(T_*f)^p\omega_m dx$ 有穷；事实上 ω_m不超过 m，并且

$$\int_{\{|x|\leqslant R\}}(T_*f)^pdx\leqslant CR^{n(1-(p/2))}\int_{\{|x|\leqslant R\}}(T_*f)^2dx$$
$$\leqslant C'R^{n(1-(p/2))}\|f\|_2^2.$$

引理 12 和定理 9 使我们可以写出 (8.3)，只要把其中的 ω 换成 ω_m，然后只需过渡到极限，而无需预先假定 $\int(T_*f)^p\omega dx<\infty$.

我们返回引理的证明. 令 $\omega(x)=e^{\beta(x)}$，对所有球 B，用 β_B表示 β 在 B 上的均值. 条件 A_p便写成

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \exp(\beta(x)-\beta_B)dx\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{|B|}\int_B \exp[-(\beta(x)-\beta_B)(p-1)^{-1}]dx\right)^{p-1}\leqslant C. \quad (8.10)$$

再注意到若 $f(x)$是 B 上的一个实函数，则有

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp f(x)dx \geqslant \exp\left(\frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx\right)$$

(这是指数函数的凸性不等式).

由此推出出现在 (8.10)的乘积中的两个因子至少等于 1. 从而每个因子都有界，而条件 $\omega\in A_p$可以表示成两个条件

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp(\beta(x)-\beta_B)dx\leqslant C'$$

和

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp(-(\beta(x)-\beta_B)/(p-1))dx\leqslant C'.$$

对这些条件还可进行两个操作，首先在第一个中以 $(\beta(x)-\beta_B)^+$代替 $\beta(x)-\beta_B$，而在第二个中以 $(\beta(x)-\beta_B)^-$代替 $\beta(x)-\beta_B$，这是因为仅仅被积函数超过 1 的值才是值得重视的. 其次，可以用一个预先未知的实数 $\lambda(B)$代替 β_B(β 在 B 上的均值). 若同时有

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp(\beta(x)-\lambda(B))^+\,dx\leqslant C' \quad (8.11)$$

和

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp(-(\beta(x)-\lambda(B))/(p-1))^+\,dx\leqslant C',$$

那么两边分别相加即得

$$\frac{1}{|B|}\int_B \mathrm{ch}(\tau(\beta(x)-\lambda(B))dx\leqslant C',$$

其中 $\tau=\inf\left(1,\frac{1}{p-1}\right)$. 然后推出 $\frac{1}{|B|}\int_B(\beta(x)-\lambda(B))^2dx\leqslant C''$，最后得 $|\lambda(B)-\beta_B|\leqslant C_1$. 再倒退回去，系统地以 β_B代替 $\lambda(B)$，

其影响只不过是改变常数.

至此引理 13 已变得显然. 同时把 $\beta(x)$ 换为 $\beta_m(x)=\inf(\beta(x),\log m)$，把 $\lambda(B)$ 换为 $\lambda_m(B)=\inf(\lambda(B),\log m)$，那么 $(\beta_m(x)-\lambda_m(B))^+\leqslant(\beta(x)-\lambda(B))^+$，对 $(\beta_m(x)-\lambda_m(B))^-$ 也有同样的不等式.

有必要作最后一个注释，Muckenhoupt 的 A_∞类是所有 A_p类的并集. 若 ω 属于 A_∞，那么 $\log\omega$ 属于 John 和 Nirenberg 的 BMO 空间. 回到条件 (8.11)就会立即看出这一事实. 反之，若 $\beta(x)$属于 BMO，那么存在充分小的 $\varepsilon>0$，使 $\omega(x)=\exp(\varepsilon\,\beta(x))$ 是一个属于 A_∞的权.

9. 注释和补充

我们叙述的理论只是关于奇异积分的目前正在进行研究的一个方面. 在 A. Nagel, N. Riviere 和 S. Wainger 的创始性工作([195])之后，E. Stein 和 Phong 系统地研究了算子 $T:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$，它们的核在一定意义下有比(2.2)和(2.3)所描述的更强的奇异性. 作为出发点的例子是沿着一条抛物线的 Hilbert 变换，它涉及到由

$$Tf(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t,y-t^2)\,\frac{dt}{t}$$

定义的一个算子 $T:L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)$. 换言之，$Tf=f*S$，其中 S 是 $\frac{1}{\pi}\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{t}$ 在映射 $t\to(t,t^2)$ 之下的分布象.

Phong 和 Stein 的最新结果涉及"沿抛物线的 Hilbert 变换"的一个推广，在这种推广中，其中核 $S(x,y)$的奇异性支集是一个包含 x 的子流形 V_x，该子流形在几何上满足某些曲率条件([203]). Calderon-Zygmund 算子概念的这些扩展联系着 Fourier 积分算子.

另一十分活跃的研究方向涉及在一个 Banach 空间取值的函

数的情形(核仍然是数值). 本章叙述的整个理论保持不变,但困难在于证明基的 L^2估计. 即使在 Hilbert 变换的情形,这一估计也不是轻松的. J. Bourgain 曾补充了 D. Burkholder 的一个工作,这些作者刻画了一些 Banach 空间 B 的特征,对具有这些特征的 Banach 空间 B,Hilbert 变换定义 $L^2(\mathbb{R};B)$(定义在$\mathbb{R}$ 上取值在 B 内的平方可积函数的空间)上一个连续线性算子. 这涉及 U.M.D. 空间 ([26],[30]和[33]).

本章研究的算子不再是卷积算子,这意味着可以撇开齐型 $\mathbb{R}^n$ 空间中的群结构. 这一观点在 [75] 中被系统发展. 理论一旦推广到齐型空间,举例来说,就将应用到幂零 Lie 群.

主要困难将在下章予以解决,是用另一可以提供 L^2估计的工具代替并不存在的 Fourier 变换,而 L^2估计是理论的基础.

同一困难也出现在 Burkholder 和 Bourgin 的著作中,在那里,虽然 Calderon-Zygmund 算子是卷积算子,但函数取值在 Banach 空间中. 若问题中的 Banach 空间不是 Hilbert 空间,就无从建立 Plancherel 定理以获得基的 L^2估计.

第 8 章　David 和 Joarné 的 $T(1)$ 定理

1. 引　言

本章补充前章并改善其中的不足之处. 前章所给的 Calderon-Zygmund 算子定义中包括四个条件,前三个可以直接验证. 算子 T 的分布核 $S(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$的开集 $y\neq x$ 上的限制 $K(x,y)$满足前三个条件,并且表现为

$$|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n}, \tag{1.1}$$

当 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时

$$|K(x',y)-K(x,y)|\leqslant C_1|x'-x|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}, \tag{1.2}$$

而当 $|y'-y|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时

$$|K(x,y')-K(x,y)|\leqslant C_1|y'-y|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}. \tag{1.3}$$

最后一个条件是算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性. 一旦超出了卷积算子这一特殊情形,这个连续性显得非常难于建立. 能否在援引条件 (1.1),(1.2)和(1.3)的前提下,找到 L^2连续性的一个便于应用的等价形式? David 和 Journé 的"$T(1)$ 定理"可作为这一问题的第一个回答,在某些情形下,它十分便于应用,可在另一些情形下却毫无用处,尽管它给出的是充分必要条件.

在 $K(y,x)=-K(x,y)$ 并且 T 的分布核是 v. p. $K(x,y)$ 这一特殊情形,G. David 和 J. L. Journé 这一准则表现为 $T(1)\in$ BMO (这解释了定理的名称). T 在恒等于 1 的函数上的象定义为 $T(1)=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}T(\varphi_\varepsilon)-c_\varepsilon$,这里 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,$\varphi(0)=1$,$\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(\varepsilon x)$,$c_\varepsilon$是较 正常数,使极限在分布意义下存在.

$T(1)$ 准则直接保证了由反对称核 $(A(x)-A(y))^k(x-y)^{-k-1}$ 定义的"Calderon 交换子"的连续性，其中 $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$，而 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是一个 Lipschitz 函数. $T(1)$ 准则不能直接应用到在 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的连续性，因为在这种情况下，我们不知道如何把 $T(1)$ 与一个已知的 BMO 函数等同. 这正是为什么要用"$T(b)$ 定理"补充"$T(1)$ 定理"的缘故，它有在 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核这一情形下起作用的功效（第 11 章）.

目前还没有一个万能准则. 例如，我们不知道是否对所有 Lipschitz 函数 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和所有 Lipschitz 函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，反对称核 $K(x,y)=F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)\frac{1}{x-y}$ 定义一个 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界算子. 已知的任何准则都不能应用到这种情况. 不过，若 F 是 C^2 类的，问题中的算子是有界的（[99]），但不能直接借助 $T(1)$ 定理抑或 $T(b)$ 定理得到这一结果.

本章我们要给出 $T(1)$ 定理两个不同的证明，在这两种情形，首先考查满足 $T(1)=0$（在非反对称情形还有 $T^*(1)=0$）的算子 T. 通过计算它们在小波标准正交基中的矩阵来建立这些算子的 L^2连续性. 这些矩阵以其远离对角线的系数的下降性刻画特征. 而这种矩阵在平方可和序列空间上的连续性借助 Schur 引理建立.

一般情形通过"校正"所研究的算子 T 得到. 这一校正通过"伪积"产生，即通过 BMO 在 L^2上作的连续的和线性的映射；通常的乘积不适宜，但建立在小波级数分析上的一个十分简单的变形提供了要寻找的映射. 这些"伪积"促使诞生了 J. M. Bony 的"仿积"，后者是将在第 16 章要讲的"仿微分"算子的渊源.

第二个证明利用 Cotlar 和 Stein 的著名的几乎标准正交化引理，并同样化归到 $T(1)=T^*(1)=0$ 的特殊情形. 由于借助适当的伪积作的校正总可归结到这种情形.

论证中我们顺便构造了 Calderon-Zygmund 算子的值得注意

的 Banach 代数，即代数 $\mathscr{M}\gamma$. $\mathscr{M}\gamma$ 中的算子 T 及其伴随算子在齐次 Hölder 空间以及 Besov 空间上连续，只要正则性指标不超过 γ.

Calderon-Zygmund 算子在 L^2以外的函数空间上的连续性质将是第 10 章的主题.

最后，本章的一般结果将用来构造 Calderon-Zygmund 算子的许多值得注意的例子，这将是第 9 章的任务.

2. $T(1)$定理的表述

在弱意义下定义的一个算子是从 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的一个连续线性算子，这里 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$是紧支的无穷次可导的函数的拓扑向量空间，而 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，是所有分布组成的对偶空间. 根据著名的 L. Schwarz 定理，这样的一个算子总可以由一个分布 $S\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 来定义，T 和 S 的关系由下式给出

$$\langle Tf,g\rangle = \langle S,g\otimes f\rangle, \tag{2.1}$$

其中 f 和 g 属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，(2.1)左端是 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 之间的对偶双线性型，而在(2.1)右端，$g\otimes f$ 是 $2n$ 个变量的函数 $g(x)f(y)$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 之间的对偶双线性型.

分布 S 称为 T 的分布核，这个分布核完全确定了 T.

在许多应用中，我们所研究的算子自然地定义在介于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$之间的拓扑向量空间 V 上. 即有 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\subset V\subset L^2(\mathbb{R}^n)$，其中两个内射连续并且其象稠密. 用 V' 表示 V 的拓扑对偶空间，我们有 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\subset V\subset L^2(\mathbb{R}^n)\subset V'\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，这里所有包含是连续的，并且象是稠密的. 我们将看到总可以化到 V 是紧支 C^1类函数的拓扑向量空间的情形，V 中的函数称为检验函数，而 V' 中的元素是相应的分布.

贯穿本章，作为出发点给定一个算子 $T:V\to V'$，自然假定它

是线性的和连续的，我们力求把 T 扩张为一个在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的算子，或同样地，证明存在一个常数 C_2，使对所有 $f \in V$ 有 $\|T(f)\|_2 \leqslant C_2 \|f\|_2$. 为得到一个不仅仅是同语反复的回答，问题的这种提法实在太宽泛了，我们要局限于下述特殊情形：T 的核在 $x \neq y$ 的限制满足(1.1)，(1.2) 和(1.3).

我们约定$\langle \cdot , \cdot \rangle$表示 V'和 V 间的对偶双线性型.

作为开始，引进一个对于线性算子 $T:V \to V'$ 的 L^2连续性来说显然的必要条件.

定义 1 设 $q \geqslant 1$ 是一个整数. 对所有以 x_0中心以 R 为半径的球 $B \subset \mathbb{R}^n$和所有函数 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，其支集含于 B，令

$$N_q^B(f) = R^{n/2} \sum_{|\alpha| \leqslant q} R^{|\alpha|} \|\partial^\alpha f\|_\infty. \tag{2.2}$$

若 $0 < s < 1$，$N_s^B(f)$ 定义为

$$N_s^B(f) = R^{(n/2)+s} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}. \tag{2.3}$$

我们说一个连续线性算子 $T:V \to V'$ 是在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的，若存在一个常数 C 和一个整数 q，使对所有球 $B \subset \mathbb{R}^n$和 V 中支集含于 B 的两个函数的对 (f,g) 都有

$$|\langle Tf, g \rangle| \leqslant C N_q^B(f) N_q^B(g). \tag{2.4}$$

下面的结果告诉我们，在一个关于 T 的分布核的十分弱的条件下，q 的数值并不重要.

定理 1 设 $T:V \to V'$ 是一个连续线性算子，用 $K(x,y)$ 表示 T 的分布核在$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$的由 $y \neq x$ 定义的开集上的限制. 假定对某个常数 C_0有 $|K(x,y)| \leqslant C_0 |x-y|^{-n}$. 此外，对某个整数 $q \geqslant 1$，T 具有性质 (2.4)，那么对所有 $s > 0$，存在常数 $C(s)$，使对所有的球 B 和所有支集含于 B 的 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 函数的对(f,g) 有

$$|\langle Tf,g\rangle| \leqslant C(s)N_s^B(f)N_s^B(g). \tag{2.5}$$

定理 1 一旦得证，就可以把 T 扩张为从 V_s到 V_s' 的一个连续线性算子，这里 V_s是这样的紧支连续函数 $f(x)$ 的空间，当 h 趋向于 0 时，其连续模 $\omega(h) = \sup_{|x-y|\leqslant h} |f(y) - f(x)|$ 满足 $\omega(h) = O(h^s)$. 换句话说，"ε 正则性"对于在弱意义下定义 T 即已足够.

转向定理的证明. 为简化记号，记 $\beta(f,g) = \langle Tf,g\rangle$，$f$ 和 g 是两个检验函数.

证明的方案是逐步改善(2.4). 先假定对某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$r > 0$ 和 $R \geqslant 2r$，f 和 g 的支集分别含于 $|x - x_0| \leqslant r$ 和 $|x - x_0| \leqslant R$. 我们要从 r 比 R 小这一事实提取好处，以便验证

$$|\beta(f,g)| \leqslant Cr^n\log\frac{R}{r}\|f\|_\infty\|g\|_\infty + Cr^n\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant q} r^{|\alpha|}\|\partial^\alpha f\|_\infty\Big)\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant q} R^{|\alpha|}\|\partial^\alpha g\|_\infty\Big) \tag{2.6}$$

这一估计使我们容易建立形如

$$|\beta(f,g)| \leqslant CR^nN_s^B(f)N_q^B(g) \tag{2.7}$$

的"中间不等式"，现在这里 f 和 g 的支集都含于以 x_0为中心以 R 为半径的球内.

把(2.7)作为出发点，并重复为得(2.7)所作的证明，便得(2.5).

为证明(2.6)，用 B' 表示球 $|x - x_0| \leqslant 3r/2$，用 $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 表示一个在 B' 上等于 1 而当 $|x - x_0| \geqslant 2r$ 时等于 0 的函数. 还假设对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，$\|\partial^\alpha\theta\|_\infty \leqslant C(\alpha)r^{-|\alpha|}$. 令 $\eta = 1 - \theta$，可写下 $\beta(f,g) = \beta(f,\theta g) + \beta(f,\eta g)$. 由对 $K(x,y)$ 所作的假设得

$$|\beta(f,\eta g)| \leqslant C_0\|f\|_\infty\|g\|_\infty\int_{E(r,R)} |x - y|^{-n}dxdy,$$

这里

$$E(r,R) = \left\{|x - x_0| \leqslant r, \frac{3r}{2} \leqslant |y - x| \leqslant R\right\}.$$

重积分由 $C(n)r^n\log\frac{R}{r}$ 估计,这正是(2.6)右端的第一项.

第二项 $\beta(f,\theta g)$在球 $|x-x_0|\leqslant 2r$ 上利用(2.4)直接放大,我们得

$$|\beta(f,\theta g)|\leqslant Cr^n\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant q}r^{|\alpha|}\|\partial^\alpha f\|_\infty\Big)\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant q}R^{|\alpha|}\|\partial^\alpha g\|_\infty\Big).$$

现在过渡到中间估计(2.7)的证明.先处理 B 是单位球 $|x|\leqslant 1$ 的情形,后面会看到,一般情形是这一特殊情形的推论.

利用第3章第8节的紧支小波基,若 $N_s^B(f)\leqslant 1$,可把 f 分解为一个级数 $\sum_{j\geqslant 0}\sum_k\alpha(j,k)u_{j,k}(x)$,其中 $u_{j,k}(x)$ 是 C^q类的,满足

$$\text{对 } |\alpha|\leqslant q,\ \|\partial^\alpha u_{j,k}(x)\|_\infty\leqslant C2^{j|\alpha|},$$

其支集含于球 $B(j,k)=\{x\in\mathbb{R}^n;|x-2^{-j}k|\leqslant C2^{-j}\}$,并且 $|\alpha(j,k)|\leqslant C2^{-js}$.

由于(2.6),我们有 $|\beta(u_{j,k},g)|\leqslant C2^{-nj}\log(2+j)$.留下的事情只是把所得的这些估计相加,并考虑到对固定的 j,k 的值的个数是 $O(2^{nj})$.收敛性由级数 $\sum_0^\infty 2^{-js}\log(2+j)$ 的收敛性保证.

为过渡到在(2.7)中 B 是任意球的情形,只须注意到对 T 所作的假设以及(2.7)在仿射群的酉变换下不变.更精确地说,若 $g(x)=ax+b,a>0,b\in\mathbb{R}^n$,令 $U_gf(x)=a^{-n/2}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$,并注意到与 T 对应的算子 $U_gTU_g^{-1}$以和 T 相同的常数满足(2.4).

为建立(2.5),逐字重复(2.7)的证明,只是把中间估计(2.7)作为出发点.这样就把(2.7)右端的 $N_q^B(g)$ 换成了 $N_s^B(g)$.

再定义先行于 Calderon-Zygmund 算子类的一个算子类,我们就将进入问题的主旨.以 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$记由 $y\neq x,x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^n$定义的开集.

定义2 我们说一个连续线性算子 T 相应于一个奇异积分,如果存在一个指数 $\gamma\in]0,1]$,两个常数 C_0和 C_1以及函数 $K:\Omega\to$

$\mathbb{C}$,使得

$$|K(x,y)| \leqslant C_0 |x-y|^{-n}. \tag{2.8}$$

当 $|x'-x| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时,

$$|K(x',y) - K(x,y)| \leqslant C_1 |x-x'|^{\gamma} |x-y|^{-n-\gamma}, \tag{2.9}$$

当 $|y'-y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时,

$$|K(x,y') - K(x,y)| \leqslant C_1 |y'-y|^{\gamma} |x-y|^{-n-\gamma}, \tag{2.10}$$

并且对所有函数 $f \in V$ 和所有不属于 f 的支集的 x

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) dy. \tag{2.11}$$

换句话说,分布 Tf 在 f 的支集的余集上的限制事实上是一个由积分表示(2.11)给出的连续函数. 解释(2.11)的另一方式是,它描述与 T 相应的 $K(x,y)$是 T 的分布核 $S(x,y)$在 Ω 上的限制.

现在过渡到 $T(1)$ 的定义.

我们给出 $T(1)$ 的两个定义. 自然的困难来自 1 不是一个检验函数. 这一困难导致 $T(1)$ 不是一个缓增分布而是一个缓增分布模常数函数的等价类.

第一个定义基于下列显然的注释.

引理 1 设 $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个分布. 假定存在 $R > 0$,使得 S 在 $|x| > R$ 上的限制事实上是一个连续函数,并且在无穷远 $S(x) = O(|x|^{-n-\gamma})$,其中 $\gamma > 0$,则积分 $\int_{\mathbb{R}^n} S(x) dx = \langle S, 1 \rangle$ 收敛.

为证明这一引理也为定义上述积分,我们写出 $1 = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)$,这里 $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,而在 $|x| \leqslant R$ 的邻域内 $\varphi_0(x) = 1$. 以

$\langle S,\varphi_0\rangle + \int (S\varphi_1)(x)dx$ 定义$\langle S,1\rangle$，其中的积分绝对收敛. 可直接证明 $\langle S,1\rangle$ 不依赖所选择的分解.

$T:V\to V'$ 的转置是由$\langle {}^tTf,g\rangle = \langle f,Tg\rangle, f\in V, g\in V$，定义的连续线性算子 ${}^tT:V\to V'$. 假设 (2.8)，(2.9) 和(2.10) 在转置下不变，与 ${}^tT$ 相应的核是 $L(x,y) = K(y,x)$.

最后，若 $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，并且$\int f(x)dx = 0$，可以定义 $\langle T(1),f\rangle = \langle {}^tTf,1\rangle$. 事实上，若 $|x|>R$ 且 f 的支集含于 $|x|\leqslant R$，则

$$ {}^tTf(x) = \int K(y,x)f(y)dy = O(|x|^{-n-\gamma}). $$

于是数学对象 $T(1)$ 在由 $\int f(x)dx = 0$ 定义的子空间 $\mathscr{D}_0\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上是一个连续线性型，以下列方式把 $T(1)$ 延拓为一个分布 $S\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，用 $\varphi\in\mathscr{D}$ 表示一个积分等于 1 的函数；所有函数 $f\in\mathscr{D}$ 就可用唯一方式写成 $f=\lambda\varphi+g$，其中 $\lambda=\int f(x)dx, g\in\mathscr{D}_0$. 任意选择值 $\langle S,\varphi\rangle$，再令 $\langle S,f\rangle = \lambda\langle S,\varphi\rangle + \langle T(1),g\rangle$.

于是数学对象 $T(1)$ 是模常数的分布类.

$T(1)$ 的另一可能的定义由下列直接逼近得到. 从一个在 0 等于 1 的函数 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 出发，对 $\varepsilon>0$，令 $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

考虑分布 $S_\varepsilon = T(\varphi_\varepsilon)$，我 们有

引理 2 可以用“标准化常数”$c(\varepsilon)$ 校正 S_ε，使得 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(S_\varepsilon - c(\varepsilon))$ 在分布意义下存在，这个极限跟 $T(1)$ 一致.

事实上，若 $f\in\mathscr{D}_0$，我们有 $\langle T(\varphi_\varepsilon),f\rangle = \langle\varphi_\varepsilon,{}^tTf\rangle$，可直接验证等式右端收敛到 $\langle 1,{}^tTf\rangle$.

作分解 $1=u+v, u\in\mathscr{D}$，而在 f 的支集的邻域内 $v=1$，用分布的定义处理 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\langle\varphi_\varepsilon,u{}^tTf\rangle$. 再由 Lebesgue 控制收敛定理处理 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\langle\varphi_\varepsilon,v{}^tTf\rangle$.

设 $w \in \mathscr{D}$ 是一个积分等于 1 的函数，令 $c(\varepsilon) = \langle S_\varepsilon, w\rangle$. 于是对 $f \in \mathscr{D}$ 和 $\lambda = \int f(x)dx$，$\langle S_\varepsilon - c(\varepsilon), f\rangle = \langle S_\varepsilon, f\rangle - \lambda\langle S_\varepsilon, w\rangle = \langle S_\varepsilon, g\rangle$，其中 $g = f\lambda w$. 于是 $g \in \mathscr{D}_0$，这 就保证了收敛性.

现在我们可以叙述 David 和 Journé 的定理，其中所用的记号都已交待清楚.

定理 1 设 $T: V \to V'$ 是在定义 2 的意义下与一个奇异积分相应的连续线性算子. 那么使 T 能连续扩张到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的充分必要条件是下述三个条件都满足：

(a) $T(1)$属于 BMO $(\mathbb{R}^n)$，

(b) ${}^tT(1)$属于 BMO $(\mathbb{R}^n)$，

(c) T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上弱连续.

首先注意条件 (b) 可等价地写为 $T^*(1) \in$ BMO，这后一函数是 ${}^tT(1)$的共轭函数.

我们用几个简单的例子阐明条件 (a)，(b)，(c) 是相互独立的. 设 T 由与一个函数 $m(x) \in$ BMO 逐点相乘定义. 显然 $K(x, y) = 0$，并且 $T(1) = {}^tT(1) = m(x) \in$ BMO，条件 (c) 不满足，除非 $m(x)$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 同一方向的第二个例子是与分布 $S = \text{p.v.}\ |x|^{-n}$ 的卷积算子. 核 $K(x,y) = |x-y|^{-n}$满足(2.8)，(2.9) 和 (2.10)，我们有 $T(1) = {}^tT(1) = 0$，这是因为 T 是一个卷积算子，但 (c) 不满足.

(a) 和 (c)满足而 (b) 则不然的有趣例子是伪微分算子 $\sigma(x, D)$，其象征满足"为难的"条件

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C(\alpha,\beta)(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|} \tag{2.12}$$

不难证明与 $\sigma(x,D)$相应的核 $K(x,y)$满足

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|} \tag{2.13}$$

此外 (c)由唯一条件 $|\sigma(x,\xi)| \leqslant C$ 推出. 但一般地这种算子在

$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上不是有界的. 我们有 $T(1) = \sigma(x,0) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 缺少的是条件 (b). 对于这个例子的更深入的研究可参考[96],在第 9 章也将继续探讨.

定理 1 的一个值得注意的特殊情形如下,T 的分布核 $S(x,y)$ 是 v. p. $K(x,y)$,这里 $K(x,y)$ 满足(2.8),(2.9) 和 $K(y,x) = - K(x,y)$. 于是有 ${}^tT = - T$,而条件 (c) 显然满足. 对于这种反对称核,T 的 L^2连续性等价于 $T(1) \in \mathrm{BMO}$.

例如考虑核 $K_m(x,y) = \dfrac{(A(x) - A(y))^m}{(x - y)^{m+1}}$,这里 $A:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是一个 Lipschitz 函数,而 $m \in \mathbb{N}$. 对应的算子 T_m是"Calderon 交换子",简单地进行分部积分即得

$$T_m(1) = T_{m-1}(A'),m \geqslant 1. \tag{2.14}$$

承认了定理 1,就可如下证明 T_m的连续性. T_0的连续性是显然的,这是因为 $T_0=\pi H$,这里 H 是 Hilbert 变换. 对 $m\geqslant1$ 进行归纳推理. 若已知 $T_{m-1}:L^2\to L^2$是一个 Calderon-Zygmund 算子,便可推出 T_{m-1}从 L^∞到 BMO 连续(第 7 章第 3 节). 而 $A'(x)$ 正好属于 $L^\infty(\mathbb{R})$,于是有 $T_m(1)\in \mathrm{BMO}$,这就保证了 T_m的 L^2连续性,并可继续这种推理.

仔细审视这个递推证明可得估计

$$\| T_m(f) \| \leqslant \pi X^m \| A' \|_\infty^m \| f \|_2, \tag{2.15}$$

其中 $X>1$ 是这一方法不能给值的常数.

在进行定理 1 的证明之前,我们注意到 (a),(b)和(c)对于 T 的 L^2连续性显然是必要的.

关于 (a)我们已回忆起所有 Calderon-Zygmund 算子也是从 L^∞到 BMO 连续的. 再注意到 1 属于 L^∞. Calderon-Zygmund 算子集合对于转置是不变的,因而 (b)满足,最后,对任何一个算子,仅由 L^2连续性便可推出弱连续性.

3. $T(1)$ 定理通过小波的证明

定理 1 的证明在于在假设 (2.8),(2.9),(2.10),(a),(b)和(c)之下建立 T 的 L^2连续性. 我们已经看到,可以假定 V 是紧支 C^1类函数的拓扑向量空间. 固定 $L^2(\mathbb{R}^n)$的一个多分辨率分析 V_j,$j\in\mathbb{Z}$,即给定 C^1类有紧支集的一个函数 φ 和小波 ψ_λ,$\lambda\in\Lambda$. 我们回顾一下,$\varphi(x-k)(k\in\mathbb{Z})$ 是 V_0的一个标准正交基,而对于 $\lambda=2^{-j}k+2^{-j-1}\varepsilon$,$\varepsilon\in\{0,1\}^n$,$\varepsilon\neq(0,\cdots,0)$,我们有 $\psi_\lambda(x)=2^{nj/2}\psi_{\varepsilon/2}\cdot(2^jx-k)$. 用 $Q(\lambda)$ 表示由 $2^jx-k\in[0,1[^n$定义的二进方体,$\psi_\lambda(x)$ 的支集含于 $mQ(\lambda)$,$m\geqslant 1$ 是一个固定整数;$mQ(\lambda)$ 由 $2^jx-k\in[-m/2+1/2,m+2+1/2[^n$ 定义.

函数 ψ_λ是实值的,证明的要点在于估计 T 在小波 Hilbert 基下矩阵系数 $\tau(\lambda,\lambda')=\langle T\psi_\lambda,\psi_{\lambda'}\rangle=\langle\psi_\lambda,{}^tT\psi_{\lambda'}\rangle$的绝对值 $|\tau(\lambda,\lambda')|$. 我们力求证明这些系数随方体 $Q(\lambda)$ 和 $Q(\lambda')$ 的位置或大小的差别而变得十分小. 为此我们多次利用下述平凡的考虑:一个积分 $\int f(x)g(x)$ 十分小,如果其中一个函数变化十分缓慢,而另一个十分集中(即集中在比起第一个函数的变化范围来小得多的范围内)并且积分为零.

在当前的情形,我们总假定 $|Q(\lambda)|$(远远) 大于 $|Q(\lambda')|$,不然把 T 换成它的转置,若 $|Q(\lambda)|$ 比 $|Q(\lambda')|$ 更大,小波 ψ_λ是平坦的,而 ψ_λ' 积分为零. 但为了得到结论,还得知道 ${}^tT(\psi'_\lambda)$ 的积分也是零,即要求 $T(1)=0$.

为了处理情形 $|Q(\lambda')|\geqslant|Q(\lambda)|$,必须假定 ${}^tT(1)=0$.

这些讨论启发我们想到若 $T(1)={}^tT(1)=0$,T 在小波基内的矩阵 M 在 Schur 引理 的意义下将几乎是对角的. 建立了下列结果,这一事实将得以验证.

命题 1 设 $T:V\to V'$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个弱连续算子，它在定义 2 的 意义下相应于一个奇异积分，再假定 $T(1)={}^tT(1)=0$.

设 $\psi_\lambda,\lambda\in\Lambda$，是有紧支集的 C^1类的小波的标准正交基. 则存在一个常数 C，使得当 $\lambda=k2^{-j}+\varepsilon 2^{-j-1},\lambda'=k'2^{-j'}+\varepsilon' 2^{-j'-1}$ 时，有

$$|\tau(\lambda,\lambda')|\leqslant C2^{-|j-j'|(n/2+\gamma)}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|k2^{-j}-k'2^{-j'}|}\right)^{n+\gamma}. \tag{3.1}$$

在作了几个预备性的注释后，(3.1)的证明将被简化. 首先 λ 和 λ' 的地位是对称的（必要时颠倒 T 和 ${}^tT$）. 于是可假定 $j'\leqslant j$. 若 $j'=j$，(3.1)显然成立. 若 ψ_λ和 $\psi_{\lambda'}$的支集相交，(3.1)直接从 T 的弱连续性推出. 若这些支集不相交，我们有

$$\begin{aligned}\tau(\lambda,\lambda')&=\iint K(x,y)\psi_{\lambda'}(x)\psi_\lambda(y)dxdy\\&=\iint(K(x,y)-K(x,\lambda))\psi_{\lambda'}(x)\psi_\lambda(y)dxdy,\end{aligned}$$

今用 (2.10)从上估计后一积分.

若 $j'\leqslant j-1$，小波 $\psi_{\lambda'}$属于 V_j，在计算 $\langle T\psi_\lambda,\psi_{\lambda'}\rangle$之前，先把 $T\psi_\lambda$正交投影到 V_j，这不会改变这个内积. 于是用下列级数代替分布 $T\psi_\lambda$，

$$g(x)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c(l)2^{nj/2}\varphi(2^jx-l), \tag{3.2}$$

其中

$$c(l)=\langle T\psi_\lambda,\varphi_{j,l}\rangle,\varphi_{j,l}(x)=2^{nj/2}\varphi(2^jx-l).$$

或利用 T 的弱连续性，或利用核的估计 (2.10)，可十分简单地估算系数 $c(l)$. 我们得到

$$|c(l)|\leqslant C(1+|k-l|)^{-n-\gamma}. \tag{3.3}$$

此外，由于 $\sum\varphi(x-l)=1$，并且 ${}^tT(1)=0$，我们有 $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c(l)=0$.

最后 $\tau(\lambda,\lambda')=\int g(x)\psi_{\lambda'}(x)dx$，这里 $\psi_{\lambda'}$ 是"平坦的"函数，而 $g(x)$ 显然是集中（在 λ 周围）的，并且由于系数 $c(l)$ 的性质，$g(x)$ 的积分是零. 这样估计(3.1)可从下列引理推出.

引理 3 设 $f(x)$ 是一个 C^1 类的函数，其支集含于$\mathbb{R}^n$的单位球，其偏导数 $\partial f/\partial x_j, 1\leqslant j\leqslant n$，满足 $\|\partial f/\partial x_j\|_\infty\leqslant 1$.

设 $\gamma>0$ 是一个指数，而 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个满足 $|g(x)|\leqslant(1+|x|)^{-n-\gamma}$和 $\int g(x)dx=0$ 的函数. 则存在一个常数 $C=C(n,\gamma)$，使对所有 $x_0\in\mathbb{R}^n$和 所有 $R\geqslant 1$ 有

$$\text{当 } |x_0|\leqslant R \text{ 时}, \left|\int g(x)f\left(\frac{x-x_0}{R}\right)dx\right|\leqslant CR^{-\gamma}. \quad (3.4)$$

而

$$\text{当 } |x_0|\geqslant R \text{ 时}, \left|\int g(x)f\left(\frac{x-x_0}{R}\right)dx\right|\leqslant CR^n|x_0|^{-n-\gamma}. \quad (3.5)$$

引理的证明是直接的，把它留给读者.

4. Schur 引理

我们把奇异积分算子的连续性问题暂置脑后，而先来回忆 Schur 引理的表述.

引理 4 设 $M=(m(p,q))_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$是一个无穷矩阵，而 $\omega(p)>0$ 是一个正数序列. 假定对所有 $p\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{q\in\mathbb{N}}|m(p,q)|\omega(q)\leqslant\omega(p), \quad (4.1)$$

并且对称地，对所有 $q\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{p} |m(p,q)|\omega(p) \leqslant \omega(q). \tag{4.2}$$

则 $M:l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ 有界,并且 M 的范数不超过 1.

事实上,假定 $\sum_0^\infty |x(q)|^2 \leqslant 1$,令 $y(p) = \sum m(p,q)x(q)$. 要证 $\sum_0^\infty |y(p)|^2 \leqslant 1$. 为此,写出等式

$$|m(p,q)||x(q)| = |m(p,q)|^{1/2}\omega^{1/2}(q)\omega^{-1/2}(q) \times |m(p,q)|^{1/2}|x(q)|.$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|y(p)|^2 \leqslant \Big(\sum_0^\infty |m(p,q)|\omega(q)\Big)\Big(\sum_0^\infty |m(p,q)|\omega^{-1}(q)|x(q)|^2\Big)$$
$$\leqslant \omega(p)\Big(\sum_0^\infty |m(p,q)|\omega^{-1}(q)|x(q)|^2\Big).$$

对 p 相加,交换两个求和的次序,再利用 (4.2) 即得结论.

Schur 引理的妙处在于指标的次序不起任何作用.

我们返回矩阵 M 在平方可和的序列的空间 $l^2(\Lambda)$ 上的连续性,其中的 M 的系数满足 (3.1).

应用 Schur 引理,其中取 $\omega(\lambda) = 2^{-nj/2}$. 这归结为从上估计

$$\sum_{j'}\sum_{k'} 2^{-nj'/2}2^{-|j-j'|(n/2+\gamma)}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{j}+2^{j'}+|k2^{-j}-k'2^{-j'}|}\right)^{n+\gamma}.$$

先处理有关 $j' \geqslant j$ 的部分. 令 $d = j' - j$,把分数放大为 $2(1+|k-k'2^{-d}|)^{-1}$. 我们有 $\sum_{k'} 2^{-nd}(1+|k-k'2^{-d}|)^{-n-\gamma} = \sum_{k'} 2^{-nd}(1+2^{-d}|k'|)^{-n-\gamma} \leqslant C(n,\gamma)$,因为后一级数可以看作一个 Riemann 和. 进而

$$\Big(\sum_{j'\geqslant j} 2^{-\gamma(j'-j)}\Big)2^{-nj/2} = C(\gamma)2^{-nj/2} = C(\gamma)\omega(\lambda).$$

同样,若 $j' \leqslant j$,令 $d = j - j'$,分数放大为 $2(1+|k2^{-d}-k'|)^{-1}$. 这就引出一个对于 k' 的和,把它关于 k 和 d 一致地放大,

即得

$$\sum_{j'\leqslant j}2^{-nj'/2}2^{-(j-j')(n/2+\gamma)}=2^{-nj/2}\sum_{d\geqslant 0}2^{-d\gamma}=C(\gamma)2^{-nj}.$$

当 $T(1)={}^tT(1)=0$ 时，定理 1 就证明了. 我们可以阐明选择 $\omega(\lambda)=2^{-nj/2}$ 的意义. 回想起第 6 章第 8 节命题 3 和 4，我们就会注意到算子 T 和 ${}^tT$ 都在齐次 Besov 空间 $\dot{B}_1^{0,1}$ 上连续，只要 $T(1)={}^tT(1)=0$. 由内插这两个估计就保证了 L^2 连续性.

5. 小波和小浪

在离开刚研究过的 $T(1)$ 定理的特殊情形以前，我们给出前述证明的一个推论:

定义 3 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f_{j,k}(x)$，$j\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}^n$，称为小浪，如果存在两个指数 $\alpha>\beta>0$ 和一个常数 C，使得

$$|f_{j,k}(x)|\leqslant C2^{nj/2}(1+|2^jx-k|)^{-n-\alpha},\tag{5.1}$$

$$\int f_{j,k}(x)dx=0,\tag{5.2}$$

$$|f_{j,k}(x')-f_{j,k}(x)|\leqslant C2^{(n/2+\beta)j}|x'-x|^{\beta}.\tag{5.3}$$

我们有下列结果.

定理 2 设函数 $f_{j,k}$，$j\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}^n$，是小浪，则存在一个常数 C'，使对所有系数序列 $\alpha(j,k)$ 有

$$\left\|\sum\sum\alpha(j,k)f_{j,k}(x)\right\|_2\leqslant C'\left(\sum\sum|\alpha(j,k)|^2\right)^{1/2}.\tag{5.4}$$

为建立 (5.4)，我们计算和 $\sum\sum\alpha(j,k)f_{j,k}(x)=f(x)$ 的 L^2 范数的平方. 这归结为计算积分

$$I(j,k;j',k') = \int f_{j,k}(x)\overline{f}_{j',k'}(x)dx.$$

由对称性,总可归结为 $j' \geqslant j$ 的情形. 首先利用 (5.1) 直接把

$$\int (1 + |2^j x - k|)^{-n-\alpha} 2^{nj'} (1 + |2^{j'} x - k'|)^{-n-\alpha} dx$$

放大为

$$C(n,\alpha)(1 + 2^j |k' 2^{-j'} - k|)^{-n-\alpha}.$$

由此推出我们所关心的积分放大为

$$2^{-(n/2)|j'-j|}\left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |k2^{-j} - k'2^{-j'}|}\right)^{n+\alpha}.$$

要用到的第二个估计如下给出

$$\left|\int (f_{j,k}(x) - f_{j,k}(2^{-j'}k'))f_{j',k'}(x)dx\right|$$

$$\leqslant C 2^{j(n/2+\beta)} \int |x - 2^{-j'}k'|^{\beta} |f_{j',k'}(x)| dx$$

$$\leqslant C' 2^{-(n/2+\beta)|j'-j|}.$$

由 $|I(j,k;j',k')|$ 的这两个估计,记之为 M_1 和 M_2,我们得第三个估计 $M_3 = M_1^{\theta} M_2^{1-\theta}$, $0 < \theta < 1$,取 θ 充分小,就得到由(3.1) 提供的估计. 据此就可利用 Schur 引理.

只要证明了所有满足定理 1 条件并且使 $T(1) = T^*(1) = 0$ 的算子 T 把一个小波标准正交基 $\psi_{j,k}$, $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, $\varepsilon \neq \{0,\cdots,0\}$,变换成小浪 $f_{j,k}^{\varepsilon}$,就可把定理 1 和定理 2 结合起来,而不等式 (5.4) 便给出 T 的 L^2 连续性的一个新的证明.

推论 设 $f_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ 是小浪,又设 $Q(j,k) = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^j x - k \in [0,1[^n\}$,则存在一个常数 C,使得对所有二进方体 $Q_0 = Q(j_0,k_0)$ 和所有函数 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\sum_{Q(j,k) \subset Q_0} \left|\int b(x) f_{j,k}(x) dx\right|^2 \leqslant C \|b\|_{BMO}^2 |Q_0|. \qquad (5.5)$$

为建立（5.5），我们从（5.4）的对偶形式出发．对所有 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\left(\sum\sum|\langle f,f_{j,k}\rangle|^2\right)^{1/2}\leqslant C'\|f\|_2. \tag{5.6}$$

然后按下列方式把 b 分解为 $b_1+b_2+b_3$. 用 Q_1表示 Q_0的二倍方体(同一中心,而直径为 2 倍),b_3为 b 在 Q_1上的均值. 若 $x\in Q_1$,函数 $b_1(x)$ 等于 $b(x)-b_3$,若 $x\notin Q_1$,$b_1(x)=0$. 同样,若 $x\notin Q_1$,$b_2(x)$ 等于 $b(x)-b_3$,而若 $x\in Q_1$,$b_2(x)$ 等于 0. 于是

$$\langle b,f_{j,k}\rangle=\langle b_1,f_{j,k}\rangle+\langle b_2,f_{j,k}\rangle.$$

把 $\sum\sum|\langle b_1,f_{j,k}\rangle|^2$放大为 $C'^2\|b_1\|_2^2\leqslant C'^2 4^n\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2|Q_0|$.
然后采用第 5 章的证明(定理 4 证明的推论）得

$$\sum_{Q(j,k)\subset Q_0}\sum|\langle b_2,f_{j,k}\rangle|^2\leqslant C''\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2|Q_0|.$$

6. 伪积和定理 1 证明的结尾

我们刚在积分

$$\alpha(\lambda)=\int {}^tT(\psi_\lambda)dx \tag{6.1}$$

和

$$\beta(\lambda)=\int T(\psi_\lambda)dx \tag{6.2}$$

对所有 $\lambda\in\Lambda$ 都等于零的假设之下证明了定理 1. 而条件 $T(1)\in\mathrm{BMO}$ 和 ${}^tT(1)\in\mathrm{BMO}$ 告诉我们,即使这些积分不是零,它们至少也是充分小的. 事实上,对所有二进方体 Q 我们有

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|\alpha(\lambda)|^2\leqslant C|Q|\,\|T(1)\|_{\mathrm{BMO}}^2, \tag{6.3}$$

和

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|\beta(\lambda)|^2\leqslant C|Q|\,\|{}^tT(1)\|_{\mathrm{BMO}}^2. \tag{6.4}$$

条件（6.3）和（6.4）是第 5 章定理 4 所给的 BMO 的特征刻

画.

(6.3) 和 (6.4) 这两个条件将使我们可以构造两个 Calderon-Zygmund 算子 R 和 S，使得

$$R(1)=T(1),\ {}^tR(1)=0,\ S(1)=0,\ {}^tS(1)={}^tT(1). \tag{6.5}$$

R 和 S 一旦构造好了，再令 $N=T-R-S$，这个算子具有下列性质：

(a) $N:V\to V'$ 是弱连续的，并且它的核满足 (2.8)，(2.9) 和 (2.10)，因为 R,S 和 T 三者都具有这些性质.

(b) 我们有 $N(1)={}^tN(1)=0$，因为我们正是为此而作的分解.

从推理的第一部分得知 N 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 由于 R 和 S 亦如是(根据下面 S 和 R 的构造)，从而 T 也将在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续，这就证明了定理 1.

现在暂把前面的一切搁置一边，而以一个任意的复数序列 $\alpha(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda$，作为出发点. 假定存在一个常数 C_0，使得若 $\lambda=k2^{-j}+\varepsilon2^{-j-1}$，$\varepsilon\in\{0,1\}^n$，$\varepsilon\neq(0,\cdots,0)$，则有 $|\alpha(\lambda)|\leqslant C_02^{-nj/2}$. 用 $\theta(x)$ 表示 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中一个积分为 1 的函数，令

$$\theta_\lambda(x)=2^{nj}\theta(2^jx-k). \tag{6.6}$$

考虑由

$$S(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)\theta_\lambda(y) \tag{6.7}$$

定义的分布 $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

这个级数在分布意义下的收敛性直接从 $|\alpha(\lambda)|\leqslant C_02^{-nj/2}$ 和函数 $\theta_\lambda,\psi_\lambda$ 的局部化性质以及 $\int\psi_\lambda(x)dx=0$ 推出.

同样容易验证这个分布 $S(x,y)$ 在 $y\neq x$ 的限制是一个函数 $K(x,y)$，它满足

当 $|\alpha|\leqslant q$ 且 $|\beta|\leqslant q$ 时 $|\partial_y^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$

(整数 q 定义了小波的正则性).

我们有

命题 2 算子 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 以 $S(x,y)$ 为分布核，T 可以延拓为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性算子，当且仅当 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)\in\mathrm{BMO}$，或等价地说，存在一个常数 C，使对所有二进方体 Q 有

$$\sum_{Q(\lambda)\in Q}|\alpha(\lambda)|^2\leqslant C|Q|. \tag{6.8}$$

由于 T 满足 (2.8)，(2.9) 和(2.10)，我们知道条件(6.8) 是必要的，因为它意味着 $T(1)\in\mathrm{BMO}$. 事实上，由于 $\int\theta_\lambda(y)dy=1$，我们有 $T(1)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$.

为证实 (6.8) 是充分的，我们把 T 作用在任意一个函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 上. 这就得到 $T(f)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\theta_\lambda(f)\psi_\lambda(x)$，其中 $\theta_\lambda(f)=\int f(y)\theta_\lambda(y)dy$. 由于小波 ψ_λ组成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个标准正交基，我们有

$$\|T(f)\|_2^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2|\theta_\lambda(f)|^2.$$

为估计上述和，我们援引属于 L. Carleson 的著名引理.

引理 5 设 $p(\lambda),\lambda\in\Lambda$，是正数或零的一个序列，使 $\sum_{Q(\lambda)\subset Q}p(\lambda)\leqslant|Q|$ 对所有二进方体 Q 成立. 则对所有序列 $\omega(\lambda)\geqslant 0,\lambda\in\Lambda$，有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega(\lambda)p(\lambda)\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\omega(x)dx. \tag{6.9}$$

这里

$$\omega(x) = \sup_{Q(\lambda) \in x} \omega(\lambda).$$

在我们的情形，忽略掉常数，取 $p(\lambda) = |\alpha(\lambda)|^2, \omega(\lambda) = |\theta_\lambda(f)|^2$，于是 $\omega(x) = (f^*(x))^2$，这里 f^* 是 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数. 注意到 $\int_{\mathbb{R}^n} (f^*(x))^2 dx \leqslant C \| f \|_2^2$，即结束证明.

还留下引理 5 的证明. 定义指示函数 $\chi(\lambda,t)$ 如下：当 $0 < t < \omega(\lambda)$ 时，$\chi(\lambda,t) = 1$，而对其余的点 (λ,t)，$\chi(\lambda,t) = 0$. 于是有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \omega(\lambda) p(x) = \int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi(\lambda,t) p(\lambda) dt.$$

对所有 $t > 0$，以 Ω_t 表示使 $\omega(x) > t$ 的 x 的集合；Ω_t 也是所有使 $\omega(\lambda) > t$ 的方体 $Q(\lambda)$ 的并集. 由 Bienaymé-Tchebitcheff 不等式，我们有 $|\Omega_t| \leqslant t^{-1} \int \omega(x) dx$，并总可假定这个积分有穷，因否则 (6.9) 没什么可证的.

用 Q_k 表示含于 Ω_t 的最大二进方体，Ω_t 是 Q_k 的并集，对所有 $t > 0$ 有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi(\lambda,t) p(\lambda) \leqslant \sum_{Q(\lambda) \subset \Omega_t} p(\lambda) = \sum_k \sum_{Q(\lambda) \subset Q_k} p(\lambda).$$

利用对 $p(\lambda)$ 所作的假设，把累次和放大为 $\sum_k |Q_k| = |\Omega_t|$. 注意到 $\int_0^\infty |\Omega_t| dt = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx$，即证完引理.

命题 2 已证毕并提供了我们要构造的 R. 为定义 S，以 $\beta(\lambda)$ 代替 $\alpha(\lambda)$，那么 S 借助 $\beta(\lambda)$ 所得的 R 的转置.

7. Cotlar 和 Stein 的引理以及 David 和 Journe 定理的第二个证明

先叙述 Cotlar 和 Stein 的著名引理.

引理 6 设 H 是一个 Hilbert 空间，$T_j: H \to H, j \in \mathbb{Z}$，是连续线性算子，其伴随算子记为 T_j^*. 假定存在一个序列 $\omega(j) \geqslant 0$，$j \in \mathbb{Z}$ 满足 $\sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\omega(j)} < \infty$，并且

$$\text{对所有 } j \in \mathbb{Z} \text{ 和所有 } k \in \mathbb{Z}, \| T_j^* T_k \| \leqslant \omega(j-k), \tag{7.1}$$

$$\text{对所有 } j \in \mathbb{Z} \text{ 和所有 } k \in \mathbb{Z}, \| T_j T_k^* \| \leqslant \omega(j-k), \tag{7.2}$$

则对所有 $x \in H$，级数 $\sum_{-\infty}^{\infty} T_j(x)$，(在 H 的范数意义下) 收敛，令 $T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} T_j(x)$，则有 $\| T \| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\omega(j)}$.

我们沿用 [108] 的证法. 首先考虑有限和 $S = S_N = \sum_{-N}^{N} T_j$. 我们有 $\| S \|^2 = \| S^* S \|$，并且由于 $S^* S$ 是一个正自伴算子，对所有整数 $M \geqslant 1$ 遂有 $\| S^* S \| = \| (S^* S)^M \|^{1/M}$. 而

$$(S^* S)^M = \sum_{j_1} \sum_{k_1} \cdots \sum_{j_M} \sum_{k_M} T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_M}^* T_{k_M}.$$

我们先粗略地把 $\| (S^* S)^M \|$ 放大为

$$\sum_{j_1} \sum_{k_1} \cdots \sum_{j_M} \sum_{k_M} \| T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_M}^* T_{k_M} \|,$$

再把上面乘积中的因子两两分组. 或者利用 (7.1)，这就把每项放大为 $\omega(j_1 - k_1) \cdots \omega(j_M - k_M)$，或者利用 (7.2)，这时要把首尾两个因子孤立起来. 由 (7.1) 得 $\| T_k \| \leqslant \sqrt{\omega(0)}$. 这时把每项放大为 $\omega(0)\omega(k_1 - j_2) \cdots \omega(k_{M-1} - j_M)$. 最后取这两次放大值的几何均值得

$$\| T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_M}^* T_{k_M} \| \leqslant \sqrt{\omega(0)} \sqrt{\omega(j_1 - k_1)} \sqrt{\omega(k_1 - j_2)} \cdots$$
$$\cdots \sqrt{\omega(k_{M-1} - j_M)} \sqrt{\omega(j_M - k_M)}.$$

把 $\sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\omega(j)}$ 的和记为 σ. 依次按 $j_1, k_1, \cdots, j_M$ 求和，我们得到

$\sqrt{\omega(0)}\sigma^{2M-1}$. 最后关于 k_M求和，这只需把前面的估计乘以 $2N+1$，终得 $\|S\|^{2M} \leqslant (2N+1)\sqrt{\omega(0)}\sigma^{2N-1}$，或 $\|S\| \leqslant ((2N+1)\sqrt{\omega(0)}/\sigma)^{1/2M}\sigma$. 再令 M 趋于无穷便得 $\|S\| \leqslant \sigma$.

为过渡到一般情形，我们采用 J. L. Journé 的方法. 首先注意到若数值 λ_j满足 $|\lambda_j| \leqslant 1$，则算子 $\lambda_j T_j$ 满足(7.1) 和(7.2)，且 ω 保持不变. 令 $y_j = T_j(x)$，从前述结论推出，对所有 $N \geqslant 1$ 有

$$\left\| \sum_{-N}^{N} \lambda_j y_j \right\| \leqslant \sigma \|x\|. \tag{7.3}$$

令

$$\varepsilon(m) = \sup_{m' \geqslant m} \sup_{|\lambda_j| \leqslant 1} \left\| \sum_{m \leqslant |j| \leqslant m'} \lambda_j y_j \right\|.$$

往证当 m 趋于无穷时，$\omega(m)$ 趋于 0. 注意 $\varepsilon(m)$ 是递减的，而若 $\varepsilon(m)$ 不趋于 0，将有 $\varepsilon(m) \geqslant \varepsilon > 0$. 于是可选取互不相交的区间 $[m_k, m'_k]$ 以及 $z_k = \sum_{m_k \leqslant |j| \leqslant m'_k} \lambda_j y_j$，使得 $\|z_k\| \geqslant \varepsilon$. 再考虑和 $\pm z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_k = Z(\theta, k)$，这里 $\theta \in \{-1,1\}^k$. 由于(7.3)，我们有 $\|Z(\theta,k)\|^2 \leqslant \sigma^2 \|x\|^2$. 再关于 2^k个 ± 1 的序列求 $\|Z(\theta,k)\|^2$ 的平均，便得 $\|z_1\|^2 + \cdots + \|z_k\|^2 \leqslant \sigma^2 \|x\|^2$，这与 $\|z_i\| \geqslant \varepsilon$ 矛盾，从而级数 $\sum_{-\infty}^{\infty} T_j(x)$ 对所有 $x \in H$ 无条件收敛.

在应用到我们所考察的情形时，令 $H = L^2(\mathbb{R}^n)$，T_j所满足的条件通过权 $w(x,y) = (1+|x-y|)^{-n-\gamma}$ 来描述，其中 $\gamma > 0$ 是一个指数. 令 $w_j(x,y) = 2^{nj} w(2^j x, 2^j y)$，并假定

$$T_j f(x) = \int T_j(x,y) f(y) dy, \tag{7.4}$$

其中

$$|T_j(x,y)| \leqslant w_j(x,y).$$

此外，对某一个指数 $\beta \in]0,\gamma[$，$T_j(x,y)$ 满足

$$|T_j(x,y) - T_j(x,y')| \leqslant 2^{j\beta} |y-y'|^{\beta} (w_j(x,y) + w_j(x,y')), \tag{7.5}$$

$$|T_j(x',y) - T_j(x,y)| \leqslant 2^{j\beta}|x - x'|^\beta(w_j(x,y) + w_j(x',y)), \tag{7.6}$$

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}^n, \int T_j(x,y)dy = 0, \tag{7.7}$$

$$\text{对所有 } y \in \mathbb{R}^n, \int T_j(x,y)dx = 0. \tag{7.8}$$

这时 Cotlar 和 Stein 引理取下列形式：

引理 8 在假设（7.4）至（7.8）之下，存在一个常数 $C(\beta, \gamma, n)$，使得

$$\| \sum_{-\infty}^{\infty} T_j \| \leqslant C(\beta,\gamma,n). \tag{7.9}$$

我们要用 Cotlar 和 Stein 引理证明这一估计. 为此要援引 Schur 引理在连续情形的相应结果估计算子 $T_j^* T_k$和 $T_j T_k^*$ 的范数.

引理 9 设 $A:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是一个 Borel 函数. 假定对所有 $x \in \mathbb{R}^n$有 $\int_{\mathbb{R}^n} |A(x,y)|dy \leqslant 1$,而对所有 $y \in \mathbb{R}^n$有 $\int_{\mathbb{R}^n} |A(x,y)|dx \leqslant 1$. 则由 $Lf(x) = \int A(x,y)f(y)dy$ 定义的算子 L 对所有 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上连续,并且其范数不超过 1.

返回引理 8. $T_k^* T_j$的核是

$$A_{j,k}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{T}_k(z,x)T_j(z,y)dz,$$

而 $T_j T_k^*$ 的核是

$$B_{j,k}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} T_j(x,z)\overline{T}_k(y,z)dz.$$

对 T_j所作的假设中变量 x 和 y 所起的作用是对称的. 有鉴于此，我们可以局限于讨论 $I(j,k) = \int |A_{j,k}(x,y)|dx$ 和 $J(j,k) =$

$\int |A_{j,k}(x,y)|dy$，并假定 $j \geqslant k$. 由等式

$$A_{j,k}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \{\overline{T}_k(z,x) - \overline{T}_k(y,x)\} T_j(z,y) dz$$

得

$$|A_{j,k}(x,y)| \leqslant 2^{k\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |y-z|^\beta \{w_k(z,x) + w_k(y,x)\} w_j(z,y) dz.$$

为估计 $I(j,k)$，在要计算的重积分中先对 x 积分. 由于 $\int w_k(z, x) dx = C$，积分由

$$2^{k\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |y-z|^\beta w_j(z,y) dz = C' 2^{-(\gamma-\beta)|j-k|}$$

估计. $J(j,k)$ 的估计类似，把它留给读者. 引理 8 证明完毕.

回到定理 1 的特殊情形. 其中 T 满足 $T(1) = 0$ 和 ${}^tT(1) = 0$. 为利用 Cotlar 引理建立 T 的连续性，需要找到一个适当的分解 $T = \sum_{-\infty}^{\infty} T_j$.

为此，用 θ 表示 $x \in \mathbb{R}^n$ 的一个偶函数，它是 C^1 类的，支集含于 $|x| \leqslant 1$ 并且积分等于 1. 令 $\theta_j(x) = 2^{nj}\theta(2^j x)$，把用 θ_j 作的卷积算子称为 S_j. 再令 $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$. T 的可以应用 Cotlar 和 Stein 引理的分解是

$$\begin{aligned} T &= \sum_{-\infty}^{\infty} (S_{j+1} T S_{j+1} - S_j T S_j) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j T S_j + \sum_{-\infty}^{\infty} S_j T \Delta_j + \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j T \Delta_j. \end{aligned}$$

验证的细节十分简单，为读者方便，我们还是写出来.

定义 4 设 $L: V \to V'$ 是一个连续线性算子. 我们说 L 是正规的，如果有

$$\text{对 } u \in V, v \in V, \quad \lim_{j \to +\infty} \langle LS_j u, S_j v \rangle = 0.$$

若 L 是正规的，那么它确实是套筒式级数 $\sum_{-\infty}^{\infty}(S_{j+1}LS_{j+1}-S_jLS_j)$ 的和. 容易给出非正规算子的例子. 不难验证 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的所有弱连续算子是正规的.

David 和 Journé 定理将由下列命题得到.

命题 3 若 T 满足定理 1 的假设，并且还满足 $T(1)={}^tT(1)=0$，则 Cotlar 引理可以应用到下列三个级数中的每一个

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_jTS_j,\ \sum_{-\infty}^{\infty}S_jT\Delta_j \text{ 和 } \sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_jT\Delta_j.$$

事实上，我们要证明一个更精确的结果. 条件 $T(1)=0$ 和 T 的弱连续性对处理第一个级数已足够；${}^tT(1)=0$ 适用于第二个级数，而最后一个级数只用到 T 的弱连续性.

集中注意力到第一个级数上. 令 $\eta_j=\theta_{j+1}-\theta_j$. 算子 Δ_jTS_j的核 $T_j(x,y)$ 用三个矩阵乘积的元素的同样规则来计算. 我们有

$$T_j(x,y)=\iint\eta_j(x-u)S(u,v)\theta_j(v-y)dudv, \quad (7.10)$$

其中 $S(u,v)$ 是 T 的分布核. 令 $\eta_j^{(x)}(u)=\eta_j(x-u),\theta_j^{(y)}(v)=\theta_j(v-y)$，我们还有

$$T_j(x,y)=\langle T\theta_j^{(y)},\eta_j^{(x)}\rangle. \quad (7.11)$$

若 x 和 y 之间的距离不超过 $4\cdot2^{-j}$，放大值由 T 的弱连续性得到，而当 $|x-y|>4\cdot2^{-j}$，可以用与 T 相应的核 $K(u,v)$ 代替 $S(u,v)$，进行通常的运算即得 (7.4).

(7.5) 和(7.6) 的验证是简单的，把它留给读者. 再看 (7.7). 这个积分正是 $T_j(1)=\Delta_jTS_j(1)=\Delta_jT(1)=\Delta_j(0)=0$. 这一形式的计算易于验证，留给读者用心去作，(7.8) 的验证更加直接.

8. T (1) 定理的其它表述

对于某些应用，能以或多或少不同的方式表达 $T(1)$ 定理中

的必要和充分条件会带来方便.

我们始终假定算子 $T:V\to V'$ 和与之相应的核 $K(x,y)$ 满足(2.8),(2.9) 和(2.10). 我们要深化 $T(1)$,${}^tT(1)$ 和连续性的联系.

命题 4 假定(2.8),(2.9),(2.10) 和弱连续成立,则 $T(1)$ 和 ${}^tT(1)$ 属于齐次 Besov 空间 $\dot{B}_{\infty}^{0,\infty}$. 反之,若 u 和 v 是 $\dot{B}_{\infty}^{0,\infty}$的任意两个元素,则存在一个算子 $T:V\to V'$ 具有性质 (2.8),(2.9),(2.10) 以及弱连续性,使得 $T(1)=u$,${}^tT(1)=v$.

为证明第一个断言,我们注意 $\dot{B}_{\infty}^{0,\infty}$是 $\dot{B}_1^{0,1}$的对偶空间. 此外,$\dot{B}_1^{0,1}$的函数有利用特殊原子的原子分解. 这些特殊原子由支集含于单位球 $|x|\leqslant 1$ 且满足 $\int\psi(x)dx=0$ 的元素 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 作为基函数构造. "特殊原子"形如 $a^{-n}\psi\left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)$,其中 $a>0,x_0\in\mathbb{R}^n$ 是任意的.

利用假设条件在群 $ax+b$ 作用下的等距不变性,一切归结为指明 $|\langle T(1),\psi\rangle|\leqslant C_0$,$C_0$仅依赖于对 T 作的假设中出现的常数和 $\sum_{|Q|=q}\|\partial^Q\psi\|_\infty$,$q\geqslant 1$ 是某一整数. 这个估计可由逐句重复定义 $T(1)$ 时用的论证得到. 弱连续性出现在项 $\langle T(\psi_0),\psi\rangle$ 的处理中,其中 $\psi_0\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,当 $|x|\leqslant 2$ 时,$\psi_0(x)=1$,当 $|x|\geqslant 3$ 时,$\psi_0(x)=0$.

为证明逆命题,重新采用定理 1 证明中所用的伪积构造. 细节留给读者.

在相反的方向上,有时从一个不同的条件出发能够证明弱连续性是有用的.

命题 5 假定与一个算子 $T:V\to V'$ 相应的核 $K(x,y)$ 具有

性质(2.8). 则由 $T:\dot{B}_1^{0,1}\to L^1$的连续性可推出 T 的弱连续性.

这里仍然归结为 $|\langle Tg,f\rangle|$ 的估计问题，其中 f 和 g 的支集含于单位球并且充分正则. 考虑 $h(x)=f(x)-f(x-x_0)$，其中 $|x_0|=3$. 于是 $h\in \dot{B}_1^{0,1}$(事实上 h 是一个特殊原子) 并有

$$\langle Tf,g\rangle=\langle Th,g\rangle+\iint K(x,y)f(y-x_0)g(x)dxdy. \tag{8.1}$$

第一项由 $T:\dot{B}_1^{0,1}\to L^1$的连续性来估计，而第二项由(2.8) 估计.

$T:\dot{B}_1^{0,1}\to L^1$ 的连续性由条件

$$\|T(\psi_\lambda)\|_2\leqslant C \tag{8.2}$$

推出，其中 $\psi_\lambda,\lambda\in\Lambda$,是第 3 章第 8 节的紧支小波的标准正交基. 由于 $\|\psi_\lambda\|_2=1$，条件 (8.2) 表明的是 T 的 L^2连续性的一种较弱形式. 为验证我们的断言，首先注意 (8.2) 和(2.10) 蕴含(见第 7 章第 3 节)

$$\|T(\psi_\lambda)\|_1\leqslant C2^{-nj/2}. \tag{8.3}$$

其次注意 (8.3) 通过 $\dot{B}_1^{0,1}$的原子分解蕴含 $T:\dot{B}_1^{0,1}\to L^1$的连续性.

命题 6 假定(2.8) 和(2.9) 成立，对所有 $\xi\in\mathbb{R}^n$，用 χ_ξ表示特征 $x\to\exp(ix\cdot\xi)$. 那么若存在一个常数 C_1，使得对所有 $\xi\in\mathbb{R}^n$，$T(\chi_\xi)$ 在 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$的范数不超过 C_1，则 T 弱连续.

为定义 $T(\chi_\xi)$ 应当利用 (2.9). 为证明弱连续性，还是归结到估计 $\langle Tf,g\rangle$，这里 f 和 g 充分光滑并且支集含于单位球. 这次令 $h(x)=g(x)-g(x-x_0)$，一切归结为估计 $\langle Tf,g\rangle$. 为此，我们写出 表达式

$$f(x)=(2\pi)^{-n}\int\hat{f}(\xi)\exp(ix\cdot\xi)d\xi,$$

于是有

$$\| Tf \|_{B^{0,\infty}_{\infty}} \leqslant (2\pi)^{-n}\int |\hat{f}(\xi)| \, \| T(\chi_\xi) \|_{B^{0,\infty}_{\infty}} d\xi \leqslant C.$$

由于 h 是一个特殊原子，由此即可估计 $|\langle Tf, g\rangle|$.

9. Calderon-Zygmund 算子的 Banach 代数

我们回忆 Riesz 变换 $R_j, 1 \leqslant j \leqslant n$，其定义是 $R_j = D_j(-\Delta)^{-1/2}, D_j = -i\partial/\partial x_j$. R_j 是第一代 Calderon-Zygmund 算子. 我们有 $R_j(1) = {}^tR_j(1) = 0$. 而这一性质被所有卷积算子即与平移交换的算子所共有. 这些算子的集合 $\mathscr{B}$ 是 Calderon-Zygmund 算子的一个交换代数，对所有 $T \in \mathscr{B}$ 有 $T(1) = {}^tT(1) = 0$.

我们可以研究一种形式的逆命题. 为此用 $\mathscr{A}$ 表示所有满足 $T(1) = {}^tT(1) = 0$ 的 Calderon-Zygmund 算子的集合.

我们将证明 $\mathscr{A}$ 是一个算子代数. 事实上，$\mathscr{A}$ 是由 Calderon-Zygmund 算子组成并包含 $\mathscr{B}$ 的最大算子代数. 更精确地说，若 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子并且 R_1T，$TR_1\cdots$，R_nT 和 TR_n也如此，则 T 必然属于 $\mathscr{A}$.

用 CZO 表示所有 Calderon-Zygmund 算子的向量空间，那么 T (1)定理的证明提供了以下分解

$$\text{CZO} = \mathscr{A} \otimes \text{BMO} \otimes \text{BMO}. \tag{9.1}$$

要得到这个分解，只须对 $T \in$ CZO 令 $T(1) = \beta, {}^tT(1) = \gamma$，并且借助这两个 BMO 函数利用第 6 节的技术构造两个伪积 L_β 和 L_γ. 再令 $T = L_\beta + {}^tT_\gamma + N$，这里 $N \in \mathscr{A}$.

作为结论，$\mathscr{A}$ 给了所有 Calderon-Zygmund 算子的整个集合一个好的逼近，并且是包含普通 Calderon-Zygmund 算子的最大代数.

还要提出并解决代数 $\mathscr{A}$ 的象征演算的基本问题. 将证明 $\mathscr{A}$ 是 Bonach 代数 $\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma(\gamma > 0)$ 的递增并集，$\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$ 同构于具体的

矩阵代数. 这就使我们有可能构造一个算子 $T \in \mathscr{A}$,它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个同构,而其逆不属于 $\mathscr{A}$.

现在是证明这些断言的时候了.

命题 7 若 $2n+1$ 个算子 $T, R_1T, TR_1, \cdots, R_nT$ 和 TR_n 都属于 CZO,则 $T(1)=0$,并且 ${}^tT(1)=0$.

为证明这个命题,我们利用由 Stein 和 Weiss 所给的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的定义,依据这个定义,$f \in H^1(\mathbb{R}^n)$,当且仅当 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,并且 $R_jf \in L^1(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant j \leqslant n$.

设 f 是一个属于 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的单位球的函数,并且 f 属于 L^2,这样我们所要进行的运算都有意义. 由于 $T, R_1T, \cdots, R_nT$ 都是 Calderon-Zygmund 算子,我们有 $Tf \in L^1, R_1Tf \in L^1, \cdots, R_nTf \in L^1$,从而 $Tf \in H^1$. 这表明 T 可扩张为 H^1 上的一个连续线性算子,由此推出 ${}^tT(1)=0$.

以 ${}^tT$ 代替 T 作同样的推理,即得 $T(1)=0$.

现在着手验证 $\mathscr{A}$ 是一个算子代数,为此证明等式 $\mathscr{A} = \bigcup_{0<\gamma<1} \mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$,其中

$\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$ 是 Calderon-Zygmund 算子的非交换 Banach 代数。 (9.2)

当 $0<\gamma'<\gamma$ 时,$\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma \subset \mathscr{O}p\mathscr{M}_{\gamma'}$. (9.3)

出发点是作用在 $l^2(\Lambda)$ 上的矩阵 Banach 代数 $\mathscr{M}_\gamma, \gamma>0$;我们回想起 Λ 是不相交的 Λ_j的并集,$\Lambda_j = 2^{-j-1}\mathbb{Z}^n \setminus 2^{-j}\mathbb{Z}^n$. 所有 $\lambda \in \Lambda$ 以唯一方式表示成 $\lambda = 2^{-j}(k+r)$,其中 $r=(\varepsilon_1/2, \cdots, \varepsilon_n/2) \in \mathbb{R}_n, \varepsilon_j = 0$ 或 1,且 $r \neq (0, \cdots, 0)$.

固定 $\gamma>0$,定义 $\omega_\gamma: \Lambda \times \Lambda \to]0, \infty[$ 如下:

$$\omega_\gamma(\lambda, \lambda') = \frac{2^{-|j'-j|(n/2+\gamma)}}{1+(j'-j)^2}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|k2^{-j}-k'2^{-j'}|}\right)^{n+\gamma}$$

定义 5 一个矩阵 $A=(\alpha(\lambda,\lambda'))_{(\lambda,\lambda')\in\Lambda\times\Lambda}$属于 $\mathcal{M}_\gamma$,如果存在一个常数 $C\geqslant 0$,使得对所有 $(\lambda,\lambda')\in\Lambda\times\Lambda$ 有

$$|\alpha(\lambda,\lambda')|\leqslant C\omega_\gamma(\lambda,\lambda'). \tag{9.4}$$

命题 8 对所有 $\gamma>0$, $\mathcal{M}_\gamma$是一个矩阵代数.

证明只不过是简单的检验. 即证实存在一个常数 $C(n,\gamma)$,使得对所有 $\lambda_0\in\Lambda$ 和所有 $\lambda_1\in\Lambda$ 有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega(\lambda_0,\lambda)\omega(\lambda,\lambda_1)\leqslant C(n,\gamma)\omega(\lambda_0,\lambda_1). \tag{9.5}$$

采用明显的记号,区分 (9.5) 中关于 $j\geqslant j_1\geqslant j_0, j_1\geqslant j\geqslant j_0$ 和 $j_1\geqslant j_0\geqslant j$ 的三个部分和(由对称性总可假定 $j_1\geqslant j_0$).

在第一种情形,注意到若 $0<\eta\leqslant\varepsilon\leqslant 1, x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^n$,则有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|x-\varepsilon k|)^{-n-\gamma}(1+|y-\eta k|)^{-n-\gamma}$$
$$\leqslant C'(n,\gamma)\varepsilon^{-n}(1+|y-x\eta\varepsilon^{-1}|)^{-n-\gamma},$$

这直接导出所要的估计. 忽略了因子 $(1+(j-j_0)^2)^{-1}$ 和 $(1+(j-j_1)^2)^{-1}$并未带来损失.

类似的注释同样适用于 $j_1\geqslant j_0\geqslant j$ 的情形. $j_0\leqslant j\leqslant j_1$这种情形更有意思,这时要注意

$$\sum_{j_0\leqslant j\leqslant j_1}(1+(j-j_0)^2)^{-1}(1+(j-j_1)^2)^{-1}$$
$$\leqslant C(1+(j_1-j_0)^2)^{-1}.$$

没有这些因子将带来"对数奇异性".

设 $\psi_\lambda,\lambda\in\Lambda$,是来自正则性 $r>\gamma$ 的一个多分辨率分析的小波基. 定义 $\mathcal{O}p\mathcal{M}_\gamma$是算子 T 的族,T 在这个标准正交基里的矩阵属于 $\mathcal{M}_\gamma$. 重要的是要指明这个定义不依赖小波基的选取. 为此,我们注意若 $\tilde{\psi}_\lambda$是另一正则性 $r>\gamma$ 的小波的标准正交基,由

$U(\psi_\lambda) = \tilde{\psi}_\lambda$定义的酉算子矩阵 $M = (m(\lambda,\lambda'))$ 属于 $\mathscr{M}_\gamma$. 事实上 $m(\lambda,\lambda') = (\tilde{\psi}_\lambda,\psi_{\lambda'})$，于是验证是直接的（类似在第 5 节所作的）.

以下限于 $0 < \gamma \leqslant 1$ 的情形. 用 $\mathscr{A}_\gamma \subset \mathscr{A}$ 表示恰好对于指数 γ 满足 (2.8)，(2.9) 和 (2.10) 且使 $T(1) = {}^tT(1) = 0$ 的 Calderon-Zygmund 算子的族. 那么有

定理 3　若设 $0 < \gamma \leqslant 1$，$T \in \mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$，则 $T \in \mathscr{A}_\gamma$. 反之，若 $T \in \mathscr{A}_\gamma$，$0 < \gamma' < \gamma$，则 $T \in \mathscr{O}p\mathscr{M}_{\gamma'}$.

定理 3 证明以后，我们将知道 $\mathscr{A}_\gamma$的并集 $\mathscr{A}$ 是一个算子代数.

一方面，若 $T \in \mathscr{A}_\gamma$，那么由(3.1)，当 $0 < \gamma' < \gamma$ 时，$T \in \mathscr{O}p\mathscr{M}_{\gamma'}$. 而另一方面，应当验证，若 $T \in \mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$，则

$$|K(x,y)| \leqslant C_0|x-y|^{-n}, \tag{9.6}$$

当 $|x'-x| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x',y)-K(x,y)| \leqslant C_1|x'-x|^\gamma|x-y|^{-n-\gamma}$, (9.7)

且

当 $|y'-y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x,y')-K(x,y)| \leqslant C_1|y'-y|^\gamma|x-y|^{-n-\gamma}$, (9.8)

由于 $\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$的定义不依赖小波基的选取，可在一个实值紧支小波基内作所有计算.

我们要建立 (9.8)，为此，把 $K(x,y)$ 分解为 $K_1(x,y) + K_2(x,y) + K_3(x,y)$，其中

$$K_1(x,y) = \sum_{(j'>j)}\sum \alpha(\lambda,\lambda')\psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(y),$$

$$K_2(x,y) = \sum_{(j'=j)}\sum \alpha(\lambda,\lambda')\psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(y),$$

而

$$K_3(x,y) = \sum_{\{j'<j\}}\sum \alpha(\lambda,\lambda')\psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(y).$$

可以验证所有这三个核都满足 (9.8). 为简略计，我们限于验证第一个. 分别用 $2^{-j_0} \leqslant |x-y| < 2^{-j_0+1}$和 $2^{-j_1} \leqslant |y'-y| < 2^{-j_1+1}$定义 $j_0 \in \mathbb{Z}$ 和 $j_1 \in \mathbb{Z}$. 我们有

$$\begin{aligned}
&|K(x,y') - K(x,y)| \\
&\leqslant C|y-y'| \sum_{\{j\leqslant j_0, j<j'<j_1\}}\sum (1+(j'-j)^2)^{-1}2^{(n+\gamma)j}2^{(1-\gamma)j'} \\
&+C \sum_{\{j\leqslant j_0, j'\geqslant j_1\}}\sum (1+(j'-j)^2)^{-1}2^{(n+\gamma)j}2^{-\gamma j'} \\
&+C|y-y'| \sum_{\{j_0<j<j'\leqslant j_1\}}\sum 2^{(n+\gamma)j}2^{(1-\gamma)j'} \\
&\quad (1+(j'-j)^2)^{-1}(1+|k-l|)^{-n-\gamma} \\
&+C \sum_{\{j_0<j, j_1<j'\}}\sum 2^{(n+\gamma)j}2^{-\gamma j'}(1+(j'-j)^2)^{-1}(1+|k-l|)^{-n-\gamma},
\end{aligned}$$

其中 (j,k) 与 λ 相应，(j',k') 与 λ' 相应，而 $l \in \mathbb{Z}^n$ 由 $2^{-j}k' \in Q(j,l)$ 定义.

作几个解释性的附注是必要的. 第一个级数对应于“大方体 $Q(\lambda)$”和“大方体 $Q(\lambda')$”. 这时让小波 $\psi_{\lambda'}(y)$ 对 y 的正则性发挥效益. 小波的局部性使得可以忽略关于 $k \in \mathbb{Z}^n$和 $k' \in \mathbb{Z}^n$的和，这是由于对于固定的 x,y 和 y'，这些和是对于坐标一致有界的对 (k,k') 的集合取的. 第二个级数对应于大方体 $Q(\lambda)$ 和小方体 $Q(\lambda')$. 小波 $\psi_{\lambda'}$ 的正则性给出的以 $|y'-y|$ 为尺度的估值变得无济于事，此时我们径直把 $\psi_{\lambda'}(y)$ 放大为 $\|\psi_{\lambda'}\|_\infty$.

前两个级数是对这样的方体 $Q(\lambda)$ 和 $Q(\lambda')$ 进行求和，其中它们的边长与它们的彼此距离比较是充分小的. 它们的距离大小的阶是 $2^{-j}(1+|k-l|)$. 若 $j' \leqslant j_1$，还可利用 $\psi_{\lambda'}(y)$ 的正则性.

前两个和当 $0<\gamma<1$ 时不难估计，仅当 $\gamma=1$ 时因子 $(1+|j'-j|^2)^{-1}$才起作用.

设 $m \geqslant 1$ 是一个整数，使得小波 ψ_λ的支集含于 $mQ(\lambda) =$

$mQ(j,k)$. 在后两个和中，j,k 和 l 由条件 $x\in mQ(j,k)$ 和 $y\in mQ(j,l)$ 相联系. 因此乘积 $2^{-j}|k-l|$ 的大小的阶是 $|y-x|$，并且 $2^{(m+\gamma)}(1+|k-l|)^{-n-\gamma}$ 基本上是一个等于 $|x-y|^{-n-\gamma}$ 的常数. 这一估计一旦作好，关于 j 求和就使 $(1+(j-j')^2)^{-1}$消失. 最后关于 j' 求和即得 $|y'-y|^{\gamma}$.

我们已经建立了 (9.8)，由对称性估计 (9.7) 也随即得到.

我们来证明 $T(1)={}^tT(1)=0$. 以 Λ_m表示 Λ 的有限部分的一个递增序列，其并集是 Λ. 当$(\lambda,\lambda')\in\Lambda_m\times\Lambda_m$时令 $\alpha_m(\lambda,\lambda')=\alpha(\lambda,\lambda')$，而对其余的 (λ,λ') 令 $\alpha_m(\lambda,\lambda')=0$. 相应的截断算子为 T_m. 那么在普通意义下 $T_m(1)=0$，并且 ${}^tT_m(1)=0$. 算子 T_m组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界集，对它们应用第 7 章(第 3 节)的引理 3. 过渡到极限，即得 $T(1)={}^tT(1)=0$.

算子 $\mathcal{O}p\mathcal{M}_\gamma$具有十分引人注目的连续性质，人们不会期待一般 Calderon-Zygmund 算子都具有这种性质. 回到一般情形 $\gamma>0$，我们有

定理 4 对所有 $\gamma>0$ 和所有 $s\in[-\gamma,\gamma]$，所有算子 $T\in\mathcal{O}p\mathcal{M}_\gamma$在齐次 Besov 空间 $\dot{B}_p^{s,q}$上有界.

这里仍然是纯粹数值的验证. 我们在来源于多分辨率分析的 Littlewood-Palay (第 3 章第 2 节) 小波基 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 中工作. 这里是利用第 6 章第 9 节定理 10 提供的 Besov 空间的特征：我们有 $\sum\xi(\lambda)\psi_\lambda(x)\in\dot{B}_p^{s,q}$，当且仅当

$$\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\xi(\lambda)|^p2^{nj(p/2-1)}\Big)^{1/p}=2^{-sj}\varepsilon_j，且\ \varepsilon_j\in l^q(\mathbb{Z}). \tag{9.9}$$

于是只须验证当 $\alpha(\lambda,\lambda')$ 满足 (9.4) 并且 $\xi(\lambda),\lambda\in\Lambda$，满足 (9.9) 时，$\eta(\lambda)=\sum_{\lambda'\in\Lambda}\alpha(\lambda,\lambda')\xi(\lambda')$ 仍然满足条件 (9.9).

为实施这一数值验证，要使用下列引理.

引理 10 对 $\gamma>0$ 和 $n\geqslant 1$ 存在一个常数 $C(\gamma,n)$，使得若 $0<\varepsilon\leqslant 1, 1\leqslant p\leqslant\infty$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$，则作用在 $l^p(\mathbb{Z}^n)$ 上的矩阵 $A_\varepsilon=(1+|k-\varepsilon l|)^{-n-\gamma}$ 的范数不超过 $C(n,\gamma)\varepsilon^{-n/p'}$.

为证明引理 10，我们首先考虑 $p=1, p'=\infty$ 的情形. 由于 $\sum_k(1+|k-\varepsilon l|)^{-n-\gamma}\leqslant C(\gamma,n)$，这时矩阵 A_ε 在 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 上一致有界. 另一极端情形是 $p=\infty, p'=1$，这时注意到 $\sum_l\varepsilon^n(1+|k-\varepsilon l|)^{-n-\gamma}\leqslant C(\gamma,n)$，这是由于所写出的和是一个收敛积分的 Riemann 和.

引理 10 的一般情形由这两个极端情形内插得到.

回到定理 4 的证明. 令 $\xi(\lambda)=2^{nj(1/p-1/2)}2^{-sj}x_\varepsilon(j,k)$，其中 $\lambda=2^{-j}(k+\varepsilon), \varepsilon=(\varepsilon_1/2,\cdots,\varepsilon_n/2)\in R^n$. 这样，相应函数属于 Besov 空间的条件就变为 $\left(\sum_k|x_\varepsilon(j,k)|^p\right)^{1/p}\in l^q(\mathbb{Z})$. 同样借助 $\eta(\lambda)$ 定义 $y_\varepsilon(j,k)$，并为简化记号，省掉指标 ε. 我们有

$$\begin{aligned}y(j,k)&=\sum_{j'}\sum_{k'}\beta(j,j',k,k')x(j',k')\\&=\sum_{j'\geqslant j}\sum_{k'}(\cdots)-\sum_{j'<j}\sum_{k'}(\cdots)\\&=u(j,k)+v(j,k).\end{aligned}$$

为对 $\left(\sum_k|u(j,k)|^p\right)^{1/p}$ 估值，对 $\varepsilon=2^{-(j'-j)}$ 应用引理 10，即得

$$\left(\sum_k|u(j,k)|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant C(\gamma,n)2^{-(\gamma+s)(j'-j)}(1+(j'-j)^2)^{-1}\left(\sum_{k'}|x(j',k')|^p\right)^{1/p}.$$

由于 $\gamma+s\geqslant 0$，注意到当 $1\leqslant q\leqslant\infty$ 时，同 $(1+j^2)^{-1}$ 作的卷积在 $l^q(\mathbb{Z})$ 上定义一个有界算子，便得结果.

为处理 $\left(\sum_k|v(j,k)|^p\right)^{1/p}$，我们注意若 $1\leqslant\varepsilon, 1\leqslant p\leqslant\infty$，

$A_\varepsilon: l^p(\mathbb{Z}^n) \to l^p(\mathbb{Z}^n)$ 的范数保持一致有界. 若 $\gamma - s + n/p \geq 0$ 即得结果.

10. Calderon-Zygmund 算子的 Banach 空间

设 H 是一个可分 Hilbert 空间,我们说 H 上的连续算子的一个有界序列 T_m弱收敛到 $T: H \to H$,如果对所有 $x \in H$ 和 $y \in H$, $(T_m x, y) \to (Tx, y)$. 我们知道从所有有界序列 $T_m: H \to H$ 可以抽一个弱收敛到一个算子 $T: H \to H$ 的子序列 T_{m_k}. 这个弱紧性定理是下列一般结果的一个特殊情形.

引理 11 设 E 是一个可分 Banach 空间. 那么 E 的对偶 E^* 的单位球 B 是一个可度量的且对于弱拓扑 $\sigma(E^*, E)$ 紧的拓扑空间.

在 $\mathscr{L}(H,H)$ 的单位球的情形,用 E 表示投影张量积 $H \hat{\otimes}_\pi H$. 那么 E^* 正是 $\mathscr{L}(H,H)$,这就使上述两个断言结合起来.

我们在第 7 章曾证明若 T_m组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列 (即若 (2.8),(2.9) 和(2.10) 对同一个指数 $\gamma > 0$ 和一致的常数 C_0, C_1 满足), 那么极限算子 T 同样是一个 Calderon-Zygmund 算子.

能否用引理 11 阐明上述事实?我们将看到回答是肯定的,只要证明了 Calderon-Zygmund 算子可自然地按 Banach 空间的族 $\mathscr{L}_\gamma, 0 < \gamma \leq 1$,归类,使得

若 T 满足(2.8),(2.9) 和(2.10),则当 $0 < \gamma' < \gamma$ 时 $T \in \mathscr{L}_{\gamma'}$,并且 T 在 $\mathscr{L}_{\gamma'}$ 里的范数只依赖于常数 $C_0, C_1, T: L^2 \to L^2$的范数以及 γ, γ'. (10.1)

若 $0 < \gamma' < \gamma$,则 $\mathscr{L}_\gamma \subset \mathscr{L}_{\gamma'}$. (10.2)

若 $T \in \mathscr{L}_\gamma$,则(2.8),(2.9) 和(2.10) 正是对指数 γ 满

足.　　(10.3)

$\mathscr{L}_\gamma$是一个可分 Banach 空间 $\mathscr{E}_\gamma$的对偶空间.　　(10.4)

为了定义 $\mathscr{E}_\gamma$和 $\mathscr{L}_\gamma$,我们回到证明定理 1 时用到的分解 $T = R + S + N$. 我们回想起来 R 是同函数 $T(1) \in$ BMO 作的伪积,S 是同 ${}^tT(1)$ 作的伪积的转置,而 N 满足 $N(1) = {}^tN(1) = 0$.

我们说 $T \in \mathscr{L}_\gamma$,当(且仅当) $N \in \mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$. 而 T 在 $\mathscr{L}_\gamma$内的范数是

$$\| T(1) \|_{\mathrm{BMO}} + \| {}^tT(1) \|_{\mathrm{BMO}} + \| N \|_{\mathscr{O}_p\mathscr{M}_\gamma},$$

按定义，最后一个范数是出现在 (9.4) 中的常数的下确界.

Banach 空间 $\mathscr{M}_\gamma$同构于 l^∞. 事实上,$\| N \|\ \mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$ 是 $\alpha(\lambda,\lambda')/\omega_\gamma(\lambda,\lambda')$ 在 $l^\infty(\Lambda^2)$ 中的范数，而序列 $\alpha(\lambda,\lambda')/\omega_\gamma(\lambda,\lambda')$ 是 $l^\infty(\Lambda^2)$ 中任一序列 (因为 ψ_λ是 Hilbert 基). 于是空间 $\mathscr{L}_\gamma$ 同构于 BMO $(\mathbb{R}^n) \otimes$ BMO $(\mathbb{R}^n) \otimes l^\infty(\Lambda^2)$，后者显然是 $H^1(\mathbb{R}^n) \otimes H^1(\mathbb{R}^n) \otimes l^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶.

我们刚证明了断言 (10.1) 至 (10.4),但明确所提到的同构是有用的. 为此,我们采用下列记号. 设 E 是一个 Banach 空间,其对偶空间是 E^*,若 $u \in E$ 而 $v \in E^*$,那么由 $(u \otimes v)(x) = v(x)u, x \in E$,定义 $u \otimes v \in \mathscr{L}(E,E)$.

我们还需要一个对偶空间 E^*的无条件基的概念. 设 E 是一个可分 Banach 空间,我们说它有一个无条件基 $e_j, j \in N$,如果所有向量 $x \in E$ 都以唯一的方式写成 $x = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots$,并且这个级数交换地收敛到 x,数 α_j由 $\alpha_j = \langle e_j^*, x\rangle$ 给定,这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是表现 E^*和 E 之间对偶关系的双线性形式.

设 $x^* \in E^*$,定义 $\beta_j = \langle x^*, e_j\rangle$,那么对所有 $y \in E$ 有

$$\langle x^*, y\rangle = \beta_0\langle e_0^*, y\rangle + \cdots + \beta_j\langle e_j^*, y\rangle + \cdots, \tag{10.5}$$

换言之，级数 $\beta_0 e_0^* + \cdots + \beta_j e_j^* + \cdots$ 在拓扑 $\sigma(E^*,E)$ 的意义下收敛到 x^*. 此外,存在一个常数 $C \geqslant 1$,使得若 $|\lambda_j| \leqslant 1$,所有级数 $\lambda_0\beta_0 e_0^* + \cdots + \lambda_j\beta_j e_j^* + \cdots$ 对于拓扑 $\sigma(E^*,E)$ 收敛到元素 $y^* \in$

E^*，满足 $\| y^* \|_{E^*} \leqslant C \| x^* \|_{E^*}$.

现在可以叙述

定理5 若 θ_λ由(6.6)定义，则三个族 $\psi_\lambda \otimes \theta_\lambda, \lambda \in \Lambda, \theta_\lambda \otimes \psi_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ 和 $\psi_\lambda \otimes \psi_{\lambda'}, (\lambda, \lambda') \in \Lambda^2$的并集在(10.5)的意义下组成 $\mathscr{L}_\gamma$ 的一个无条件基.

换句话说，所有算子 $T \in \mathscr{L}_\gamma$ 以唯一方式表示成

$$T = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) \psi_\lambda \otimes \theta_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda} \beta(\lambda) \theta_\lambda \otimes \psi_\lambda + \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \gamma(\lambda, \lambda') \psi_\lambda \otimes \psi_{\lambda'}. \tag{10.6}$$

具体地说，(10.6)意味着 T 的分析核 $S(x, y)$ 由下式给定

$$S(x,y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x) \theta_\lambda(y) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \beta(\lambda) \theta_\lambda(x) \psi_\lambda(y) + \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \gamma(\lambda, \lambda') \psi_\lambda(x) \psi_\lambda(y). \tag{10.7}$$

此外，若 $\Lambda_m, m \in N$，是 Λ 的有限部分的一个递增序列，其并集为 Λ，算子 T_m由(10.6)定义，其中 Λ 用 Λ_m代替，那么 T_m组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列，其极限是 T.

利用这些仅有的信息，容易识别(10.6)中出现的三个级数. 事实上，$T_m(1) = \sum_{\lambda \in \Lambda_m} \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x)$，简单地过渡到极限即得 $T(1) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x)$，因而(10.6)右端的第一个级数是与 $T(1)$ 作的伪积. 第二个级数是同 $T(1)$ 作的伪积的转置. 而最后一个是算子 $N \in \mathcal{O}p\mathcal{M}_\gamma$.

值得注意的是加在(10.6)的系数上的条件是关于绝对值的明确条件(这个事实从无条件基的定义推出)，对 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 我们有条件(6.3)和(6.4)，对 $\gamma(\lambda, \lambda')$ 有条件(9.4).

11. 伪积的变种

我们已经给的 “$T(1)$ 定理” 的证明基于一个双线性算子 π: $\mathrm{BMO} \times L^2 \to L^2$, 它使得对所有函数 $b \in \mathrm{BMO}$, 算子 $f \to \pi(b,f)$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子. 我们回想起

$$\pi(b,f) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle b, \psi_\lambda \rangle \langle f, \theta_\lambda \rangle \psi_\lambda. \tag{11.1}$$

我们曾把这个运算叫作 伪积. 请看为什么这样称呼. 若 $b \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, 那么 $\pi(b,f)$ 属于 L^r, 这里 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. 作为一个例子, 我们证明, 若 b 和 f 两者都属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\pi(b,f)$ 属于 Stein 和 Weiss 的空间 H^1. 为证实这一事实, 设 g 是 BMO 的一个函数, 我们试图用 $C\|b\|_2\|f\|_2\|g\|_{\mathrm{BMO}}$ 估计 $|\langle \pi(b,f), g \rangle|$. 为此可直接验证 $\langle \pi(b,f), g \rangle = \langle b, \pi(g,f) \rangle$, 而这就归结为开头的状况.

上述的一切表明伪积改善了普通乘积在 Hölder 不等式方面的性能: 两个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数的乘积提供一个 L^1函数, 而非 H^1的函数, 甚至一个 BMO 的函数和一个 L^2的函数的乘积一般也不属于 L^2.

函数之间的这一新的代数运算构成了 Calderon 的著作带来的变革之一. 我们追溯一下 Calderon 是如何构思的. 设 $0 < p \leqslant \infty$, 用 $\mathbb{H}^p$表示在上半空间全纯并且满足

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx < \infty$$

的函数的空间. 若 $f \in \mathbb{H}^p$且 $g \in \mathbb{H}^p$, 那么 Calderon 用 $h'(z) = f(z)g'(z)$ 和 $h(i\infty) = 0$ 定义第三个全纯函数 $h(z)$, $\mathrm{Im} z > 0$.

由于 fg 的导数由 $fg' + f'g$ 给定, 可以把 $h(z)$ 看作 f 和 g 乘积的“一半”, 另一半由 $h'(z) = f'(z)g(z)$ 定义.

Calderon 在 1965 年证明了他的伪积的表现如同普通乘积. 特

别地他的第一交换子(其分布核是 v.p. $(A(x)-A(y))(x-y)^{-2}$, $A'\in L^\infty(\mathbb{R})$ 的 L^2连续性的证明就是基于不等式 $\|h\|_1\leqslant C\|f\|_2\|g\|_2$. 这个手法又出现在基于伪积连续性的 $T(1)$ 定理的证明中.

属于伪积家族的另一双线性运算是著名的 J.M.Bony 的仿积([16]),本著作的末尾还要回到这一运算上来.

为定义仿积,用 $\gamma(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示一个辐射的属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}$ 的函数,其 Fourier 变换满足:当 $|\xi|\leqslant 1$ 时 $\hat{\gamma}(\xi)=1$,而当 $|\xi|\geqslant 3/2$ 时 $\hat{\gamma}(\xi)=0$. 对所有 $j\in\mathbb{Z}$,设 $S_j:L^2\to L^2$是同 $2^{nj}\gamma(2^jx)$ 作的卷积算子,令 $\Delta_j=S_{j+1}-S_j$.

分解 $1=\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_j$ 是 Littlewood-Paley 分解. 若 f 属于 L^2, $f_j=\Delta_j(f)$ 的 Fourier 变换的支集含于由 $2^j\leqslant|\xi|\leqslant 3\cdot 2^j$定义的环内. J.M.Bony 的仿积 是由

$$B(f,g)=\sum_{-\infty}^{\infty}S_{j-1}(f)\Delta_j(g)$$

定义的双线性算子.

指标的安排是颇具匠心的. 其效果是乘积 $h_j=S_{j-1}(f)\Delta_j(g)$ 有良好的"频率局部性". 为证实这一点,我们注意,若一个函数 u 的谱(即 Fourier 变换的支集)是一个紧集 A,而 v 的谱是闭集 B,则乘积 uv 的谱含于 $A+B$.

把上述注释用到 h_j,我们得知 h_j的支集含于 $\frac{1}{4}2^j\leqslant|\xi|\leqslant\frac{15}{4}2^j$. 这个良好的频率局部性保证了 h_j当 $j\equiv 0(\mathrm{mod.}\,4),\cdots$,或 $j\equiv 3(\mathrm{mod.}\,4)$ 时的正交性. 于是有

$$\|B(f,g)\|_2\leqslant 4\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\|S_{j-1}(f)\Delta_j(g)\|_2^2\Big)^{1/2}.$$

进而容易援引 Carleson 引理([47])把这个表达式放大为

$C\|f\|_2\|g\|_{\mathrm{BMO}}$. J. M. Bony 的仿积也可用来证明定理 1，因为我们有

$$B(1,g)=\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_j(g)=g, \text{若 } g\in \mathrm{BMO}.$$

重新回到由 (11.1) 定义的双线性算子. J. L. Journe 可以直接把这个算子的连续性同小波组成 BMO 空间的无条件基这事实联系起来. Journe 的证明基于下述命题，后面将给以证明.

命题 9 设 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子. 假定 T 可以扩张为从 L^∞ 到 BMO 内的连续算子（为此我们利用 $\mathscr{D}$ 在赋予弱拓扑 $\sigma(L^\infty,L^1)$ 的 L^∞ 内的稠密性）. 又设 T 的分布核限制在 $x\neq y$ 上满足 $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n}$ 和

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|y'-y|}|K(x,y')-K(x,y)|dx\leqslant C, \qquad (11.2)$$

则 T 可扩张为 L^2 $(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性算子.

这个命题要用到算子 $f\to\pi(b,f)$. (11.2) 的验证是直接的，可从

$$|\langle b,\psi_\lambda\rangle|\leqslant\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|\psi_\lambda\|_{H^1}\leqslant C2^{-nj/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}}$$

推出. 于是只需再验证 $\|\pi(b,f)\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C\|f\|_\infty\|b\|_{\mathrm{BMO}}$就可得结论. 由于 $|\langle f,\theta_\lambda\rangle|\leqslant C\|f\|_\infty$，我们可把 (11.1) 的右端解释为由 $b=\sum_{\lambda\in\Lambda}(b,\psi_\lambda)\psi_\lambda$所给的在 BMO 中无条件收敛级数的一个可能的修正. 修正在于引进了属于 $l^\infty(\Lambda)$ 的相乘的系数.

留下的任务是证明命题 9. 先验证 T 从 H^1到 L^1是连续的，再通过内插，我们即可得到所希望的结论 ([75] 或 [109]).

为了证明 T 在 H^1上的连续性，我们利用由按 L^∞范数规范化原子作的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解. 设 $a(x)$ 是一个支集在以 x_0为中心以 $R>0$ 为半径的球 B 内的一个这样的原子；把它按照条件 $\|a\|_\infty\leqslant|B|^{-1}$规范化，并使它满足 $\int a(x)dx=0$.

设 B' 是 B 的"孪生球",B' 的半径是 R,它的中心 x_1满足 $|x_1 - x_0| = 3R$. 用 $3B$ 表示中心为 x_0的半径为 $3R$ 的球.

设 $|x - x_0| \geqslant 3R$, 写出 $Ta(x) = \int (K(x,y) - K(x, x_0))a(y)dy$,利用 (11.2) 即得

$$\int_{|x-x_0|\geqslant 3R} |Ta(x)|dx \leqslant C.$$

还需要估计 $\int_{3B} |Ta|dx$. 由于 a 属于 L^∞, Ta 属于 BMO. 没有关于 Ta 在 $3B$ 上的均值的信息还是不足以估计 $\int_{3B} |Ta|dx$. 由于 $Ta \in$ BMO,这个均值同样由计算 Ta 在 B' 上的均值来估计. 这时可利用估计 $|K(x,y)| \leqslant C_0|x - y|^{-n}$,计算是直接的,并留给读者.

12. 注释和补充

人们可以致力去发现 T 的核 $K(x,y)$ 关于 x 和 y 的正则性的最少条件,以保证得到定理 1 的结论.

为了能够定义 $T(1)$ 和 $'T(1)$,只须 $K(x,y)$ 满足 Hömander 条件

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|y'-y|} |K(x,y') - K(x,y)|dx \leqslant C \tag{12.1}$$

和

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|x'-x|} |K(x,y) - K(x,y)|dy \leqslant C < \infty. \tag{12.2}$$

我们尚不知道在这些条件下定理 1 是否仍然成立. 证明的敏感部分是在条件 (12.1),(12.2),$T(1) = 0$,$'T(1) = 0$ 和 T 的弱连续性之下 T 的连续性.

本章研究的算子不再是卷积算子,看来在局部紧群以外的几何框架之内 $T(1)$ 定理的成立是自然的. 一个自然的几何框架曾

由 Coifman 和 Weiss 定义并称之为齐次性质的空间. 这些作者指出第 7 章的大部分结果在这一框架内仍然成立. 最后 David, Journe 和 Semmes 对齐次性质空间建立了 $T(1)$ 定理 ([76],[97]和[98]).

第 9 章　Calderon-Zygmund 算子的例子

1. 引　言

起初，Calderon-Zygmund 算子和伪微分算子是一致的．一方面，考虑核 $K(x,y)=L(x,x-y)$，这里 $L(x,z)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 满足

$$若\ |z|=1,\ |\partial_x^{\alpha}\partial_z^{\beta}L(x,z)|\leqslant C(\alpha,\beta)$$

$$若\ \lambda>0,\ L(x,\lambda z)=\lambda^{-n}L(x,z),$$

以及

$$\int L(x,z)d\sigma(z)=0$$

其中 $d\sigma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的单位球 $|z|=1$ 上的普通曲面测度．算子由 $Tf(x)=\text{v.p.}\int L(x,x-y)f(y)dy$ 定义．而另一方面，可以找到一个象征 $\sigma(x,\xi)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 满足

若 $|\xi|=1$，$|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_x^{\beta}\sigma(x,\xi)|\leqslant C(\alpha,\beta)$，

若 $\lambda>0$，$\sigma(x,\lambda\xi)=\sigma(x,\xi)$．

若要包括不依赖于 ξ 的象征，它们对应用 x 的有界函数作的逐点乘法算子，就没必要假定象征在 $|\xi|=1$ 上的平均值为零．

象征 $\sigma(x,\xi)$ 和算子 T 的关系是 $Tf(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$．粗略地说，我们有 $T(e^{ix\cdot\xi})=\sigma(x,\xi)e^{ix\cdot\xi}$，这一运算类似于

无线电检波的振幅调制. 核和象征由

$$\text{v. p.} \int L(x,y)e^{-i\xi\cdot y}dy = \sigma(x,\xi) \tag{1.1}$$

联系起来 (Fourier 变换是在分布意义下取的).

由 Calderon 和 Zygmund 在 50 年代发现的关系 (1.1) 为以后的伪微分算子的整个发展开辟了道路，这种算子不必参照核而是由象征代数直接定义. 在那个黄金时代以后，两种观点分道扬镳：Kohn 和 Nirenberg 为一方与 Hörmander 为另一方都系统地优先考虑通过象征作的伪微分算子定义. 而在 Calderon 和 Zygmund 学派里关于核的研究仍保持着极大活力，并引导出了我们所称的 "Calderon -Zygmund 算子".

留下的问题是要知道是否所讨论的算子可借助满足正则性和在无穷远的增长性的简单条件的象征来定义.

可惜对 Calderon 计划的算子的集合 $\mathscr{C}$ 并非如此. 尽管这样，却存在一个算子代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}$，它是可以或用它们的核，或用它们的象征，或用它们在一个小波基里的矩阵来描述的.

举例来说，我们以满足限制性估计

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)| \leqslant C(\alpha,\beta)|\xi|^{|\beta|-|\alpha|} \tag{1.2}$$

的象征作为出发点.

熟知这些估计不足以保证获得 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子. 由于 $T(1)$ 定理，要求 T 及其伴随算子 T^* 的象征都满足 (1.2) 将是充分的. 这些算子的集合 $\mathscr{A}_\infty$ 是 $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))$ 的一个子代数. 本章目的之一是证明这个代数 $\mathscr{A}_\infty$ 同样可由加在所讨论的算子的分布核的条件刻画特征.

算子 $T\in\mathscr{A}_\infty$ 最后通过它们在 Littlewood-Paley 的小波的标准正交基内的矩阵刻画特征，而这一性质可用来对象征演算进行研究. 与伪微分算子的普通代数相反，存在一个算子 $T\in\mathscr{A}_\infty$，它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的同构，但其逆却不属于 $\mathscr{A}_\infty$.

当利用小波作为经典函数空间的无条件基时，算子 $T\in\mathscr{A}_\infty$

就会出现. 设标准正交基 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$,是 B 的一个无条件基,即所有在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界且在基 ψ_λ内对角化的算子都可扩张为 B 上的一个连续线性算子,那么这些算子属于 $\mathscr{A}_\infty$.

本章将处理的第二组例子不能用普通的伪微分语言描述. 在第 13 章我们将看到可把这一语言推广到多重线性算子以便处理这类算子. 这涉及到交换子 $\Gamma_1 = [A_1, L_1], \Gamma_2 = [A_1, [A_2, L_3]], \cdots, \Gamma_k = [A_1, [A_2, \cdots, [A_k, L_k]] \cdots]$,其中 L_j是 j 阶经典的伪微分算子,而 A_j是用正则性有限制的函数 $a_j(x)$ 作的逐点乘法算子. Calderon 计划在于研究既包括普通伪微分算子又包括用正则性充分少的函数作的乘法算子.

这就要探索加于 $a_j(x)$ 的正则性的最少条件,使得对于 1 阶,$\cdots$,k 阶算子 $L_1, \cdots, L_k$的任意选择,都能推出交换子 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界. 选择 k 阶常系数微分算子作为 L_k,即可确信 $a_j(x)$ 必须是 Lipschitz 函数.

这一必要条件事实上还是充分的,这一结果是 $T(1)$ 定理的最精采的应用之一.

本章要介绍的 Calderon-Zygmund 算子的最后一个例子是在一条 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核以及由此用 Calderon 和 Zygmund 的旋转法导出的算子.

我们将在第 12 章系统研究 Cauchy 核,但是我们宁愿现在就证实它的连续性可从 $T(1)$ 定理和由 G. David 引进并经 T. Murai 简化的实变新方法推出.

2. 伪微分算子和 Calderon-Zygmund 算子

设 $\sigma(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,而 $\sigma(x, D): \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是由

$$\sigma(x, D) f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \tag{2.1}$$

定义的算子，设 R 是由 $(Rf)(x)=f(x-x_0)$ 定义的一个平移算子，那么 $R^{-1}\sigma(x,D)R=\tau(x,D)$，这里 $\tau(x,\xi)=\sigma(x+x_0,\xi)$. 又设 $\delta_a,a>0$，是由 $(\delta_a f)(x)=f(a^{-1}x)$ 定义的展缩算子，那么 $\delta_a^{-1}\sigma(x,D)\delta_a=\tau(x,D)$，这里 $\tau(x,\xi)=\sigma(ax,a^{-1}\xi)$.

条件 $\sigma(x,\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 在这两个运算之下是同构不变的. 据此可建立

引理 1 设 $\sigma(x,\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，则算子 $\sigma(x,D)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上具有弱连续性.

事实上，设 f 是一个紧支的 C^q类函数，这里 $q>n/2$. 那么 $\hat{f}(\xi)\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 事实上可设 q 是整数，当 $|\alpha|\leqslant q$ 时，由于 $\partial^\alpha f$ 连续且有紧支集，遂得 $\xi^\alpha\hat{f}(\xi)$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，从而

$$(1+|\xi|^q)\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n),$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式即得

$$\hat{f}(\xi)\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

于是若 f 是 C^q类的，支集在单位球内，并且 $q>n/2$，那么由 (2.1) 得

$$|\sigma(x,D)f(x)|\leqslant C\|f\|_{C^q}.$$

由此推出弱连续性. 事实上，过渡到支集含于任意的函数可由上面有关在群 $ax+b(a>0,b\in\mathbb{R}^n)$ 作用下的不变性的注释推出.

引理 2 假定 $\sigma(x,\xi)$ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$，并且

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)KC(\alpha,\beta)|\xi|^{|\beta|-|\alpha|},\alpha\in\mathbb{N}^n,\beta\in\mathbb{N}^n. \tag{2.2}$$

则 σ (x, D) 的分布核 S (x, y) 满足

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta S(x,y)|\leqslant C'(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|},\alpha\in\mathbb{N}^n,\beta\in\mathbb{N}^n. \tag{2.3}$$

为证引理，利用通过截断象征实现的逼近技术. 用 $\varphi_0(\xi)$ 表示 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 的一个函数，它当 $|\xi|\leqslant 1/2$ 时等于 1，而当 $|\xi|\geqslant 1$ 时等于 0. 令 $\varphi_1=1-\varphi_0$，而以 $\sigma_j(x,\xi)=\sigma(x,\xi)\varphi_0(j^{-1}\xi)$ 代替 $\sigma(x,\xi)$，$j\geqslant 1$. 令 $T_j=\sigma_j(x,D)$，可直接证明，对 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的所有函数对 (f,g) 有

$$\langle\sigma(x,D)f,g\rangle=\lim_{j\to\infty}\langle T_jf,g\rangle. \tag{2.4}$$

证明的要点是验证 T_j 的分布核 S_j 一致地满足 (2.3)，由于 S 是 S_j 的弱极限，过渡到极限即得 (2.3).

后面还会用到另一种截断，对 $\sigma(x,\xi)$ 作的假设允许在 $\xi=0$ 有不连续性. 为避免后面将使我们忧虑的这一问题，可用 $\sigma(x,\xi)\varphi_1(j\xi)\varphi_0(j^{-1}\xi)$ 代替 $\sigma(x,\xi)$.

基本点是估计 (2.2) 不被这些运算破坏，从而在后面的计算中我们忽略指标 j，并可假定 $\sigma(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，$\sigma(x,0)=0,\cdots,\partial_\xi^\alpha\sigma(x,0)=0,\cdots$，并且 $\sigma(x,\xi)$ 关于 ξ 的支集是紧的.

考虑到这些条件，象征和核之间的关系显然可以写成

$$S(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot(x-y)}\sigma(x,\xi)d\xi. \tag{2.5}$$

为了证明 (2.3)，我们从假定 $|x-y|=1$ 开始，并首先估计 $|S(x,y)|$，导数 $|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta S(x,y)|$ 的情形以类似的方式处理.

重作分解 $1=\varphi_0(\xi)+\varphi_1(\xi)$，相应地令

$$S_0(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot(x-y)}\sigma(x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi$$

和

$$S_1(x,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot(x-y)}\sigma(x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi.$$

$|S_0(x,y)|$ 的估计是直接的，而在 $2m$ 次分部积分后可写出

$$S_1(x,y)=(2\pi)^{-n}(-1)^m\int e^{i\xi\cdot(x-y)}\Delta^m\{\sigma(x,\xi)\varphi_1(\xi)\}d\xi,$$

再利用对象征 作的假设以及下列事实，当 $\alpha\neq 0$ 时，若 $|\xi|\geqslant 1$ 或 $|\xi|\leqslant 1/2$，则 $\partial^\alpha\varphi_1(\xi)=0$.

于是仅对含 $(\Delta^m\sigma(x,\xi))\varphi_1(\xi)$ 的项积分区域无界，当 $2m>n+1$ 时，利用假设即得结论.

当 $|x-y|=1$ 时，$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta S(x,y)|$ 的从上估计是类似的. 为过渡到 $y\neq x$ 的一般情形，只需利用群 $ax+b(a>0,b\in\mathbb{R}^n)$ 的作用.

对 $x_0\in\mathbb{R}^n$和 $a>0$，利用平移 x_0和展缩 a 变换 $T=\sigma(x,D)$，核 $S(x,y)$ 就变为 $a^nS(ax+x_0,ay+x_0)$，象征 $\sigma(x,\xi)$ 就变为 $\sigma(ax+x_0,a^{-1}\xi)$. 而对象征 $\sigma(x,\xi)$ 作的假设在这个变量替换下不受影响，这一注释使我们可以从特殊情形 $|y-x|=1$ 出发推广到一般情形.

基本问题是要知道是否算子 $T=\sigma(x,D)$ 可以扩张为在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的线性算子. 为解决这一问题，我们要利用 $T(1)$ 定理，这要从建立下列引理开始.

引理 3 在引理 2 的假设下有 $T(1)=0$.

援引逼近法以证明这个结果，以截断了的象征 $\sigma_j(x,\xi)$ 逼近 T 的象征 $\sigma(x,\xi)$，$\sigma_j(x,\xi)$ 对应的算子记作 T_j.

显然在朴素的意义下 $T_j(1)=0$. 此外，T_j的分布核关于 j 一致地满足(2.3)，并且有关于 j 一致的弱连续性. T_j在(2.4)的意义下弱收敛到 T. 由此推出 $T_j(1)$ 在空间 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$中收敛到 $T(1)$，这里 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$被赋予拓扑 $\sigma(\dot{B}_\infty^{0,\infty},\dot{B}_1^{0,1})$. 这一事实直接采用第 7 章引理 3 的推理即可证明. 终得 $T(1)=0$.

还要计算 $\sigma={}^tT(1)$.

我们已经知道 σ 属于 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$. 因此 σ 是 $\dot{B}_1^{0,1}$上的连续线性泛函. 为了推进计算，利用下列引理是适宜的.

引理 4 其 Fourier 变换在 0 的邻域内是零的函数 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的空间 V 在 $\dot{B}_1^{0,1}$中稠密.

下面就是这一引理的十分简单的证明.

用 S 表示 $\dot{B}_1^{0,1}$ 上的一个连续线性泛函，它满足条件：对所有 $f \in V$，$\langle S, f\rangle = 0$，于是 S 属于 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$. 任意选择以仿射函数为模的 S 的一个表示，这一表示是一个缓增分布，仍记为 S.

过渡到 Fourier 变换即知，只要 $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 0 的附近为零就有 $\langle \hat{S}, g\rangle = 0$. 由此得知 $\hat{S}$ 是一个支集含于 $\{0\}$ 的分布，从而 S 是一个多项式. 由于 S 属于 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$，那么 S 实际上是一个仿射函数；即 S 在 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$ 内的类是零.

现在可过渡到 $\sigma = {}^tT(1)$ 的计算.

命题 1　设 $\sigma(x,\xi)$ 是一个满足条件 (2.2) 的象征. 那么积分 $(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)dx$ 在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上定义一个分布 τ，而 ${}^tT(1)$ 是 τ 的在下述意义下的广义 Fourier 变换：对 $f \in V$，

$$\langle {}^tT(1), f\rangle = (2\pi)^{-n}\iint e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\sigma(x,\xi)dxd\xi. \qquad (2.6)$$

首先注意 (2.6) 右端的收敛性勿庸置疑. 事实上，考虑积分 $I(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\sigma(x,\xi)d\xi$，并注意到这个函数连续且在无穷远对任意 N 有阶 $O(|x|^{-N})$，这后一性质可由分部积分建立.

因而分布 τ 有定义并且 (2.6) 有意义，等式(2.6) 由下列等式得以证明.

$$\langle {}^tT(1), f\rangle = \int T(f)dx = (2\pi)^{-n}\int I(x)dx.$$

今举一例. 设 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，是一个无穷可微的标准正交基（来源于 Littlewood-Paley 的多分辨率分析）. 设 $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是一个积分等于 1 的函数，对 $\lambda = 2^{-j}(k+\varepsilon), k \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon = (\varepsilon_1/2, \cdots, \varepsilon_n/e)$，令 $\theta_\lambda(x) = 2^{nj}\theta(2^jx - k)$.

考察由下式定义的算子

$$Tf(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda(x) \langle a, \psi_\lambda \rangle \langle f, \psi_\lambda \rangle, \tag{2.7}$$

其中 $a \in \dot{B}_\infty^{0,\infty}$.

经直接计算得 T 的象征

$$\sigma(x,\xi) = \sum\sum \alpha(\lambda)\theta(2^j x - k)\exp(-j2^{-j\xi} \times (2^j x - k))\hat{\psi}_\varepsilon(-2^{-j}\xi), \tag{2.8}$$

其中 $\alpha(\lambda) = 2^{nj/2}\langle a, \psi_\lambda \rangle \in l^\infty(\Lambda)$，这是由于 a 属于 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$.

仅对满足 $c_1 2^j \leqslant |\xi| \leqslant c_2 2^j (c_2 > c_1 > 0)$ 的 j 的值，$\hat{\psi}_\varepsilon(-2^{-j}\xi) \neq 0$，而对固定的 j 和 x，关于 k 的求和由 θ 的支集所限制. 这两个注释使得可以放大 $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$ 并得到所要的估计.

我们有 $T(1) = 0$ 和 ${}^tT(1) = a \in \dot{B}_\infty^{0,\infty}$. 在这个例子中我们注意到转置算子 ${}^tT$ 恰好是 a 和 f 间的伪积. 当且仅当 $a \in \mathrm{BMO}$，算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 连续.

现在该引进主要定义了. 设 T 是一个在弱意义下定义的算子，它的核满足 (2.3)，那么我们说 $T(x^\alpha) = 0$(模阶 $\leqslant |\alpha| = m$ 的多项式，如果对所有函数 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，这里 g 对所有长度 $|\beta| \leqslant m$ 的多重指标 β 满足 $\int x^\beta g(x)dx = 0$，我们有 $\int {}^tT(g)x^\alpha dx = 0$. 注意在 $g(x)$ 的支集之外有 ${}^tTg(x) = \int S(y,x)g(y)dy = O(|x|^{-n-m-1})$. 为验证这一估计，只须注意 $g = \sum_{|\gamma| = m+1} \partial^\gamma g_\gamma$，这里 $\partial^\gamma = (\partial/\partial x_1)^{\gamma_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\gamma_n}$，而 $g_\gamma \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

定义 1 我们说一个 Calderon-Zygmund 算子属于类 $\mathscr{A}_\infty$，如果下列三个条件满足：

与 T 相应的核 $K(x,y)$ 在对角线之外无穷次可微，并且

若 $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$,

$$\tag{2.9}$$

对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $T(x^\alpha) = 0$(模阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式), (2.10)

对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ${}^tT(x^\alpha) = 0$(模阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式). (2.11)

下列定理提供了 $\mathscr{A}_\infty$的特征刻画.

定理 1 算子 T 属于 $\mathscr{A}_\infty$,当且仅当下列条件之一满足

对所有 $\gamma > 0$, T 属于 $\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$, (2.12)

T 和 ${}^tT$ 的象征满足条件(2.2). (2.13)

这个特征刻画的价值在于把借助核的描述同借助象征的描述以及对应矩阵的特征刻画联系起来.

推论 向量空间 $\mathscr{A}_\infty$是一个算子代数.

事实上,$\mathscr{O}$p $\mathscr{M}_\gamma$对所有 $\gamma > 0$ 是一个代数.

现返回到定理 1 的证明.

本质上重复在第 8 章对 $\mathscr{A}_\gamma$曾经作过的研究. 即对 $T \in \mathscr{A}_\infty$ 的矩阵元素逐字重复第 8 章的计算进行放大,这就要利用 (2.10) 和(2.11),并援引 m 阶的 Taylor 公式把引理 3 中的函数 f 在 x_0 附近展开. 现将细节留给读者.

一旦知道了对所有 $\gamma > 0$, T 属于 $\mathscr{O}p\mathscr{M}_\gamma$,就容易计算 T 的象征并验证 (2.2),计算没任何困难,请读者去作. 最后,假定 T 的象征满足 (2.2),那么引理 2 告诉我们 T 的核 K 满足(2.3). 由我们已描述过的 T_j逼近 T 的技术可验证 $T(x^\alpha) = 0$(模阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式). 对 T 的转置重复这一论证即可完成定理 2 的证明.

G. Bourdaud ([21]) 得到一个与定理 1 类似的定理. 代替 (2.2),利用满足

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C(\alpha,\beta)(1 + |\xi|)^{|\beta| - |\alpha|} \qquad (2.14)$$

的象征 $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. 按照 Hörmander 的一个术语,这

样的 σ 属于象征的类 $S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

我们记 $T\in\mathscr{B}_\infty$,如果 T 和其转置的象征同时满足 (2.14).

算子 $T\in\mathscr{B}_\infty$可由小波系数估计刻画特征. 为作这种事情,利用由 $\psi_\lambda,\lambda\in\Lambda_j,j\in\mathbb{N}$ 和由 $\psi_k(x)=\varphi(x-k),k\in\mathbb{Z}^n$,定义的 φ_k, $k\in\mathbb{Z}^n$,组成的标准正交基是适宜的. 注意 Λ 是 $\Gamma_0=\mathbb{Z}^n$和 $\Lambda_j,(j\in\mathbb{N})$ 的不相交并集,若 $\lambda\in\Gamma_0$,可以用记号 ψ_λ代替 φ_k.

我们约定 $\lambda\in\Lambda_j,j\in\mathbb{N}$,对应由 $2^jx-k\in([0,1[)^n$ 定义的二进方体,并记之为 $Q(\lambda)=,\lambda=2^{-j}(k+\frac{1}{2}\varepsilon),k\in\mathbb{Z}^n,\varepsilon\in E$. 而若 $\lambda\in\Gamma_0$,对应的二进方体无非是 $\lambda+([0,1[)^n$.

最后在所讨论的边长 $\leqslant 1$ 的所有二进方体的集族中引进一个距离. 设 Q 和 R 是两个这样的二进方体,把使 λQ 包含 R 且 λR 包含 Q 的 $\lambda\geqslant 1$ 的下确界 (λQ 和 Q 有同一中心,λQ 的直径是 Q 的 λ 倍) 记作 $\lambda(Q,R)$. 那么 $d(Q,R)=\log_2\lambda(Q,R)$ 是在我们的二进方体集合中的一个距离. 我们把这个距离移置到 Λ 上,令 $d(\lambda,\lambda')=d(Q(\lambda),Q(\lambda'))+d(\varepsilon,\varepsilon')$,其中依照 $\varepsilon=\varepsilon'$ 或 $\varepsilon\neq\varepsilon'(\varepsilon\in E,\varepsilon'\in E)$ 而令 $d(\varepsilon,\varepsilon')=0$ 或 1.

下列定理提供了算子 $T\in\mathscr{B}_\infty$的特征刻画.

定理 2 设 $T:\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个在弱意义下定义的算子. T 属于 $\mathscr{B}_\infty$的充分且必要的条件是

$$\alpha(\lambda,\lambda')=(T(\psi_\lambda),\psi_{\lambda'}),\lambda\in\Lambda,\lambda'\in\Lambda$$

(若 $\lambda\in\Lambda_0$, ψ_λ代以 φ_λ, 对 ψ_λ' 也如是) 满足下列条件

对所有 $N\geqslant 1$, 存在一个常数 $C(N)$ 使

$$|\alpha(\lambda,\lambda')|\leqslant C(N)\exp(-Nd(\lambda,\lambda')). \qquad (2.15)$$

注意若 $\lambda\in\Gamma_0$时不用 φ_λ代替 ψ_λ,那么 (2.15) 就是代数 $\mathscr{A}_\infty$ 的特征刻画,而 $\mathscr{A}_\infty$是 $\mathscr{B}_\infty$的齐次变体. 在这个齐次变体中,大的方体起着跟小的方体同样的作用. $T\in\mathscr{B}_\infty$的分布核 $S(x,y)$ 及其

对 x 和 y 的所有导数在无穷远迅速减小，以致大方体在这类算子的分析中不起任何作用.

定理 2 的证明跟定理 1 的类似，恕不赘述.

可用几个例子说明 $\mathscr{B}_\infty$ 的研究. 以象征的类 $S^0_{1,\delta}(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ 作为开始. 我们说 $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1,\delta}$，如果 $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)|^{\delta|\beta|-|\alpha|}$. 那么可以验证 $\mathscr{O}pS^0_{1,\delta}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续算子一个自伴代数，并且 $\mathscr{O}pS^0_{1,\delta}$ 包含在 $\mathscr{B}_\infty$ 内.

第二个属于 $\mathscr{B}_\infty$ 的"天然"的例子是由 J. M. Bony ([16]) 提供的仿微分算子. 在第 16 章还要回到这类算子上来. 考虑象征 $\sigma(x,\xi)$，它属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，满足

$$|\partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)| \leqslant C(\alpha)(1+|\xi|)^{-\alpha},$$

并且具有下列性质：对所有 $\xi \in \mathbb{R}^n$，作为 x 的函数，$\sigma(x,\xi)$ 的 Fourier 变换是一个函数或是一个分布，其支集含于球 $|\cdot| \leqslant |\xi|$ 内. 那么对应的算子 $T = \sigma(x,D)$ 属于 $\mathscr{B}_\infty$. 为证实这一断言，首先对每一固定的 ξ，把 $\sigma(x,\xi)$ 看作 x 的函数，并对这一函数应用 Bernstein 引理，遂得

$$|\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)| \leqslant C(\alpha)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}|\xi|^{|\beta|}.$$

于是有 $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1,1}$，$T = \sigma(x,D)$ 的分布核 $S(x,y)$ 限制在 $y \neq x$ 上满足估计 $|\partial^\alpha_x \partial^\beta_y S(x,y)| \leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$. 我们有 $T(x^\alpha) = 0$(模阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式)，采用引理 3 的证明即可核实这一点. 由于对象征 $\sigma(x,\xi)$ 所作的特殊假设，尚有 ${}^tT(x^\alpha) = 0$ (模阶 $\leqslant |\alpha|$ 的多项式). 为核实这一点，以 $\sigma_m(x,\xi) = \sigma((1-1/m)x,\xi)$ $(m \geqslant 2)$ 逼近 $\sigma(x,\xi)$，这就提供了所考虑的算子 T 的一个逼近 T_m，这个逼近关于 m 一致地满足对 T 所作的假设，于是有 ${}^tT_m(x^\alpha) = 0$，而对 ${}^tT$ 的相应结论可由简单的极限过渡得到. 举例来说，我们计算 ${}^tT_m(1)$，为此利用命题 1. 这归结为考虑 $\int e^{ix\cdot\xi}\sigma_m(x,\xi)dx$. 而由于对象征的谱所作的假设，这个积分是零.

我们解释了为什么 T 属于 $\mathscr{A}_\infty$. T 属于 $\mathscr{B}_\infty$ 这一事实来源如

下：由于象征的 C^∞ 正则性，估计

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta S(x,y)| \leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|},$$

可改进为对所有 $N \geqslant 1$，只要 $|x-y| \geqslant 1$ 就有

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta S(x,y)| \leqslant C(N,\alpha,\beta)|x-y|^{-N}.$$

在用这些例子说明研究代数 $\mathscr{B}_\infty$ 的动机之后，我们转向算子代数 $\mathscr{B}_\infty$ 中的**象征演算**的基本问题上来. 按照 Calderon 的说法，对于一个 Banach 代数 B 的象征演算是一个连续同态 $\chi: B \to C$，C 是一个比 B "更简单" 的 Banach 代数，而 χ 有下列性质：$b \in B$ 在 B 中可逆，当且仅当 $c=\chi(b)$ 在 C 中可逆. Banach 代数 B 和 C 可能是非交换的.

回到代数 $B=\mathscr{B}_\infty$，并取 C 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上所有连续算子的代数 $\mathscr{S}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$. 同态 χ 是 B 到 C 内的内射. 我们的问题是要知道是否这个内射是 $\mathscr{B}_\infty$ 上的一个象征演算，换言之，即要知道是否一个在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上可逆的算子有一个逆算子 $T^{-1} \in \mathscr{B}_\infty$. 对这一提问我们要给一个十分强的否定回答. 我们注意到所有算子 $L \in \mathscr{B}_\infty$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子，因此对 $1<p<\infty$，L 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

定理 3 对所有 $p>2$，存在一个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到自身的算子 $T \in \mathscr{B}_\infty$，使 T^{-1} 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上不是有界的.

这个结果首先由 P. Tchamichian 建立，这里我们给出一个属于 P. G. Lemarie 的不同的例证.

我们回想起 $\Lambda_j = 2^{-j-1}\mathbb{Z}^n \backslash 2^{-j}\mathbb{Z}^n$，在下文中，我们把 Λ 看作 $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^n$ 和 $\Lambda_j (j \in \mathbb{N})$ 的不相交并集.

定义一个映射 $\theta: \Lambda \to \Lambda$ 如下：若 $k \in \mathbb{Z}^n$，令 $\theta(k)=k$，若 $\lambda = k2^{-j} + \varepsilon 2^{-j-1} \in \Lambda_j$，$\varepsilon \in E$，令 $\theta(k2^{-j} + \varepsilon 2^{-j-1}) = k2^{-j} + \varepsilon 2^{-j-2}$. 我们看出 $\theta(\lambda) \in \Lambda_{j+1}$，并且 θ 是从 Λ 到 Λ 内的一个单射.

让 θ 对应一个特殊的等距 $U: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$，它由 $U\varphi_k = \varphi_k, \varphi_k = \varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}^n$和 $U\psi_l = \psi_{\theta(\lambda)}$ 定义. 由于当 λ 遍历 Λ 时，λ 和 $\theta(\lambda)$ 的距离有界，算子 U 属于 $\mathscr{B}_\infty$.

设 z 是一个模小于 1 的复数，$T = 1 - zU$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是可逆的. 我们证明，若 $p \geqslant p_0(|z|)$，T^{-1} 不可能在 L^p上有界. 从而 T^{-1} 不是一个 Calderon-Zygmund 算子，就更不能奢望 T^{-1}属于 $\mathscr{B}_\infty$了.

今有 $T^{-1}(z) = \sum_0^\infty 2^k U^k(f)$，而若 $f = \psi_\lambda$，则有 $T^{-1}(\psi_\lambda) = \sum_0^\infty z^k \psi_{\theta^k(\lambda)}$，可直接计算（第 6 章，定理 1）这个函数的 L^p范数，并且验证当 $|z| 2^\delta \geqslant 1, \delta = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}, T^{-1}(\psi_\lambda) \notin L^p$.

若 $1 < p < 2$，同样存在一个算子 $T \in \mathscr{A}_\infty$，它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个同构，但其逆 T^{-1} 在 L^p上不是有界的.

为证实这一点，本质上采用前述方法，这次定义算子 U 如下，若 λ 不属于 $\theta(\Lambda)$，令 $U(\psi_\lambda) = 0$，若 λ 属于 $\theta\Lambda$，令 $U(\psi_\lambda) = \psi_{\theta^{-1}(\lambda)}$，那么当 $|z| < 1$ 时，$T = 1 - 2U$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上可逆，但利用跟前面同样的计算可以证明当 $|z| \geqslant 2^{n(1/2-1/p)}$时 T^{-1}在 L^p上不是有界的.

$\mathscr{A}_\infty$和 $\mathscr{B}_\infty$这两个代数似乎是反常的. 事实上，当要验证由 Littlewood-Paley 多分辨率分析生成的小波 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，组成一个函数空间 B（例如 Besov 空间）的无条件基时，就不得不同代数 $\mathscr{A}_\infty$打交道. 为证实所要验证的结论，基本点是考虑在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续且在标准正交基 ψ_λ内是对角的所有算子 T，并证明这些算子都在空间 B 上有界. 因为这些算子属于 $\mathscr{A}_\infty$，这就引导我们系统地研究 $\mathscr{A}_\infty$的算子在各种函数空间上的连续性（这正是下章要作的）.

同样若 ψ_λ和 $\tilde{\psi}_\lambda, \lambda \in \Lambda$，是两个属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的小波的标准正交基，由 $U(\psi_\lambda) = \tilde{\psi}_\lambda, \lambda \in \Lambda$，定义的算子 $U: L^2 \to L^2$属

于 $\mathscr{A}_\infty$. 因此当对小波的标准正交基感兴趣时，代数 $\mathscr{A}_\infty$ 是回避不了的.

下列结果是一个有关的应用.

命题 2 存在三个属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ 的函数 ψ_1, ψ_2 和 ψ_3，使小波 $2^j\psi_1(2^jx-k), 2^j\psi_2(2^jx-k) 2^j\psi_3(2^jx-k), x\in\mathbb{R}^2, k\in\mathbb{Z}^2, j\in\mathbb{Z}$ 组成 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个标准正交基，但找不到一个 r- 正则的 $(r\geqslant 1)$ 多分辨率分析生成这些小波.

我们不知道是否在一维情形有这样的反例.

考虑以 Littlewood-Paley 的多分辨率分析为出发点用张量积方法形成的二维标准正交基. 用 $\psi_\lambda, \lambda\in\Lambda$，表示这个小波基，并要用象征为 $\zeta/|\zeta| (\zeta=\xi+i\eta)$ 的酉算子 U；换言之，$U=R_1+iR_2$，R_1 和 R_2 是两个 Riesz 变换. 那么 $\tilde{\psi}_\lambda=U(\psi_\lambda)$ 就提供了所要的反例.

事实上，用 $V_j, j\in\mathbb{Z}$，表示多分辨率分析，从它生成 ψ_λ. 如果 $\tilde{\psi}_\lambda$ 来自一个多分辨率分析，这只能是 $\tilde{V}_j=U(v_j)$. 今证 $\tilde{V}_j, j\in\mathbb{Z}$，不是 r- 正则的 $(r\geqslant 1)$.

用归谬推理，假定存在 $h\in\tilde{V}_0$ 使得 $h\in L^2\cap L^1$ 并且 $h(x-k), k\in\mathbb{Z}^2$，是 $\tilde{V}_0$ 的一个标准正交基.

那么我们有 $\hat{h}=\hat{\varphi}\chi\zeta l|\zeta|$，这里 $\chi(\xi,\eta)$ 是每一变量的 2π 周期函数. 这是由于 $\tilde{V}_0=U(V_0)$ 和 $\mathscr{F}V_0$ 的特征刻画. 函数 $h(x-k)$，$k\in\mathbb{Z}^2$，组成标准正交序列这一事实蕴含 $\sum|\hat{h}(\xi+2k\pi)|^2=1$. 由于 $\hat{\varphi}$ 也满足这一条件，便得几乎处处 $|\chi(\xi,\eta)|=1$. 然后注意到，在 Littlewood-Paley 的多分辨率分析的构造中，若 $-\pi\leqslant\xi\leqslant\pi, -\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$，则有 $\hat{\varphi}(\xi,\eta)>0$. 由于 h 属于 $L^1(\mathbb{R}^2)$，$\hat{h}$ 在正方形 $[-\pi,\pi]^2=C_0$ 上是一个连续函数，从而乘积 $\chi(\xi,\eta)\dfrac{\xi+i\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$ 亦如是. 组成相似曲线 $\varepsilon\partial C_0$ 的单参数族 $\Gamma_\varepsilon, 0<\varepsilon\leqslant 1$，$\partial C_0$ 是 C_0 的有向边界. 计算象曲线 $\chi(\varepsilon\partial C_0)$ 关于 0 的指标. 当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

$\chi(\xi,\eta)=c\dfrac{\xi-i\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+o(1)$，其中 c 是模为 1 的常数. 由此推出对充分小的 ε，$\chi(\varepsilon\partial C_0)$ 的指标等于 -1. 而若 $\varepsilon=1$，把正方形 ∂C_0 的对边结为一组，它们方向相反，再利用 χ 的周期性，那么很清楚，$\chi(\partial C_0)$ 对于 0 的指标是零. 函数 χ 在 C_0 内除 0 外连续且模为 1，在变形的过程中，$0\notin\partial C_0$，而 $\chi(\varepsilon\partial C_0)$ 含于 $|z|=1$. 这就导致了一个矛盾.

3. 交换子和 Calderon 的精确伪微分法

伪微分法犹如神话中被焚烧的凤凰又在其余烬中重生一样，它第一次诞生于 30 年代，创身之父是 Giraud（[119]）和 Marcinkiewicz（[183]）. 于 50 年代末第二次重生，并且显然受益于 40 年代由 L. Schwartz 发现的分布理论.

使我们感兴趣的是它的第三次诞生或重生. 为了处理系数缺乏正则性的线性偏微分方程，尤其是为了研究非线性偏微分方程解的正则性问题，Calderon 决定在伪微分法中插入用函数 $a(x)$ 作的逐点乘法算子 A，$a(x)$ 在我们要精确阐明的意义下关于 x 有较少的正则性. Calderon 自然期望保留前几十年的研究对象，即古典的伪微分算子 $T\in\mathcal{O}pS^m_{1,0}$.

整个伪微分演算的困难在于算子的两个交换代数相互对峙：乘以正则性给定的(在通常情形下是无穷可微的)函数 $a(x)$ 的逐点乘法算子的代数 X，以及常系数微分算子和由它代数地导出的算子(即卷积算子 $T\in\mathcal{O}pS^m_{1,0}$)的代数 Y.

对峙表现在算子 $S\in X$ 同算子 $T\in Y$ 不交换这一事实上. 交换性的这一缺陷导致计算交换子 $[S,T]$，其中 $S\in X, T\in Y$. 最简单的例子是 Leibniz 法则提供的交换子 $[A,D_j]$，这里 A 是 C^1 类(或 Lipschitz)函数 $a(x)$ 作的乘法算子，而 $D_j=\partial/\partial x_j$. 那么 $[A,D_j]=A_j$ 是用 $a_j(x)=-\partial/\partial x_j a(x)$ 作的逐点乘法算子，$a_j(x)$

属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Calderon 力求把 Leibniz 法则推广到 $[A,T]$ 这种情形，其中 A 是前述算子，而 $T\in \mathcal{O}pS^1_{1,0}$. Calderon 在 1965 年证明了当 $a(x)$ 是一个 Lipschitz 函数时，交换子总是在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的，这一结果在某种意义下推广了 Leibniz 法则.

如今 Calderon 的定理十分简单地借助 $T(1)$ 定理得到. 我们叙述这个证明，并且按照 Calderon 的作法，由此推出具有关于 x 的最小正则性的伪微分算子的存在性.

定理4 若 A 是乘以一个 Lipschitz 函数 $a(x)$ 的逐点乘法算子，则对所有一阶经典伪微分算子 $T\in \mathcal{O}pS^1_{1,0}$，交换子 $[A,T]$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子.

反之，若 $[A,T]$ 当 $T=\partial/\partial x_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 时在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界，必有 $\partial a/\partial x_j\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，从而 $a(x)$ 是 Lipschitz 函数.

为证明定理 4，先进行两个化简会带来方便. 第一个化简是总可假定 $\sigma(x,0)=0$，因否则用 $\sigma(x,\xi)-\sigma(x,0)$ 代替 $\sigma(x,\xi)$ 即可归结为这个特殊情形. 对于算子这意味用乘以一个 x 的函数的逐点乘法算子校正 $T=\sigma(x,D)$，而在作了这个校正之后，交换子 $[A,T]$ 并不改变.

第二个化简在于用 $\sum_1^n T_jD_j$代替 T，其中 $D_j=\partial/\partial x_j$. 回到象征，即 $\sigma(x,\xi)\in S^0_{1,0}$，由于$\sigma(x,0)=0$，这种表示是可能的，这就使得可以利用有关可微函数的理想的古典结果(事实上回顾该结果的证明以获得关于 $\sigma_j(x,\xi)$ 的必要的估计).

先叙述证明的形式结构. 下述的考虑随后将严格地验证. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$是由 $y\neq x$ 定义的开集. T 的分布核 $S(x,y)$ 在 Ω 上的限制是一个无穷可微的函数，满足

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta S(x,y)|\leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-1-|\alpha|-|\beta|}.$$

由此推出 $[A,T]$ 的分布核在 Ω 上的限制 $K(x,y)$ 是 $(a(x)-a(y))S(x,y)$，并满足

$$|K(x,y)|\leqslant C\|\nabla a\|_\infty|x-y|^{-n},$$
$$|\partial/\partial x_j K(x,y)|\leqslant C\|\nabla a\|_\infty|x-y|^{-n-1},$$

以及

$$|\partial/\partial y_j K(x,y)|\leqslant C\|\nabla a\|_\infty|x-y|^{-n-1}(1\leqslant j\leqslant n).$$

为证明 $[A,T]$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界，我们利用 $T(1)$ 定理.

从建立弱连续性开始，对 $\mathbb{R}^n$ 的任意球 B（中心为 x_0，半径为 R）和任意两个 C^1 类的，支集含于 B 内且在 B 内调整好的（在满足 $\|u\|_\infty\leqslant 1$，$\|\nabla u\|_\infty\leqslant R^{-1}$，$\|v\|_\infty\leqslant 1$，$\|\nabla v\|_\infty\leqslant R^{-1}$ 的意义下）函数 u 和 v 的对 $|\langle[A,T]u,v\rangle|$ 不超过 $C\|\nabla a\|_\infty R^n$.

为得到这个估计，把 $a(x)$ 换为 $a(x)-a(x_0)$，算子 $[A,T]$ 此时保持不变. 我们放大 $\|AT(u)\|_{L^2(B)}$ 和 $\|TA(u)\|_2$，再由 Cauchy-Schwartz 不等式即得欲要的估计.

我们有

$$\begin{aligned}\|AT(u)\|_{L^2(B)}&\leqslant\|a\|_{L^\infty(B)}\|T(u)\|_2\\&\leqslant R\|\nabla a\|_\infty\sum_1^n\|T_j\partial_j u\|_2\\&\leqslant CR\|\nabla a\|_\infty\sum_1^n\|\partial_j u\|_2\\&\leqslant CR^{n/2}\|\nabla a\|_\infty,\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}\|TA(u)\|_2&\leqslant C\sum_1^n\|\partial/\partial x_j(au)\|_2\\&\leqslant C'\|\nabla a\|_\infty\|u\|_2+CR\|\nabla a\|_\infty\|\nabla u\|_2\\&\leqslant c''R^{n/2}\|\nabla a\|_\infty.\end{aligned}$$

然后计算

$$[A,T](1)=a(x)T(1)-T(a)=-T(a)=-\sum_1^n T_j(D_ja).$$

这后一个函数属于 BMO，盖因 T_j是 Calderon-Zygmund 算子，从而从 L^∞到 BMO 连续.

为使 $[A,T](1)$ 的计算不再是形式的，只需以算子 T_m逼近 T，T_m的象征在原点和在无穷远(作为 ξ 的函数) 被截断. 这一技术在引理 2 和 3 的证明中都曾描述，这里就不坚持进一步说明细节了.

致于说到 $[A,T]$ 的转置，它正是 $[A,{}^tT]$，于是计算与刚介绍的类似.

我们叙述由 Calderon 引进的一种新的象征代数.

定义 2 Calderon 精密伪微分法象征 $\sigma(x,\xi)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的连续函数，并且满足下列三个条件

$$\text{对所有 } \lambda>0, x\in\mathbb{R}^n \text{ 和 } \xi\neq 0, \sigma(x,\lambda\xi)=\sigma(x,\xi), \tag{3.1}$$

$$\text{若 } |\xi|=1, |\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\leqslant C_\alpha, \tag{3.2}$$

$$\text{若 } |\xi|=1, 1\leqslant j\leqslant n, |\partial/\partial x_j\partial_\xi^\alpha(x,\xi)|\leqslant C'_\alpha. \tag{3.3}$$

定义 3 一个连续线性算子 $S:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个一阶正则化算子，如果 $2n$ 个算子 D_jS 和 SD_j都在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续，这里 $D_j=\partial/\partial x_j$，$j=1,\cdots,n$.

现在该宣布 Calderon 的定理了.

定理 5 设 $\mathscr{C}$ 是所有具有下列性质的算子 T 的集合，T 可表示成 $T=T_1+T_2$，$T_1=\sigma(x,D)$ 的象征 $\sigma(x,\xi)$ 满足(3.1)，(3.2) 和 (3.3)，而 T_2是一个一阶正则化算子. 则 $\mathscr{C}$ 是一个算子代数. 正则化算子的集合 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的理想，而 $\mathscr{C}/\mathscr{I}$ 是一个交换 Banach 代数，它同构于满足 (3.1)，(3.2) 和 (3.3) 的象征的代数.

换句话说，若 $\sigma(x,D)$ 和 $\tau(x,D)$ 的象征 $\sigma(x,\xi)$ 和 $\tau(x,\xi)$

满足(3.1),(3.2) 和 (3.3),则算子 $\tau(x,D)\sigma(x,D)$ 可表示成 $T_1 + T_2$,T_1的象征是 $\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi)$,而 T_2是一个 1 阶正则化算子.

Calderon 定理的证明需要下列引理.

引理 5 假定 $\sigma(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 满足下列两个条件

对所有 $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 和 $\lambda > 0, \sigma(\chi,\lambda\xi) = \sigma(x,\xi)$, (3.4)

若 $|\xi| = 1, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n, |\partial_\xi^\alpha(x,\xi| \leqslant C(\alpha)$. (3.5)

则算子 $\sigma(x,D)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

为证明这个引理,按照 Calderon 和 Zygmund 的证法,把 $\sigma(x,\xi)$ 在球面 $|\xi| = 1$ 上按球调和函数展开,这里 $x \in \mathbb{R}^n$固定,由关于 ξ 的正则性 就得到依范数收敛级数

$$\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty m_k(x)h_k(\xi), \sum_0^\infty \| m_k \|_\infty \| h_k \|_\infty < \infty.$$

把 $h_k(\xi)\alpha$ 延拓为一个 0 阶齐次函数,后者是算子 H_k的象征,而把与 $m_k(x)$ 相乘的逐点乘法算子记为 M_k. 这就 得到

$$\sigma(x,D) = \sum_0^\infty M_k H_k,$$

这个级数是依范数收敛的.

现证 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个双边理想,仅有的困难是验证:若 $T_j \in \mathscr{T}$, 而 $T_2 = \sigma(x, D)$ 的象征满足 (3.1), (3.2) 和 (3.3), 并且 $D_j = \partial/\partial x_j$,那么 $T_1T_2D_j$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

为证明这一事实, 我们计算交换子 $[D_j,T_2] = T_3$. 今有 $T_3 = \tau(x,D)$,而 $\tau(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma(x,\xi)$. 引理 5 保证 T_3在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 于是 $T_1T_2D_j = (T_1D_j)T_2 - T_1T_3$的每一项在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续.

我们返回定理的证明. 对满足(3.1),(3.2) 和(3.3) 的所有象征 $\sigma(x,\xi)$ 统统进行球面调和函数分解,定理就可从下列引理推

出.

引理 6 设 A 是一个由 Lipschitz 函数 $a(x)$ 作的逐点乘法算子,而 H 是一个卷积算子,其象征 $\sigma(\xi)$ 对 $\xi \neq 0, \lambda > 0$ 满足 $\sigma(\lambda\xi) = \sigma(\xi)$,并且对 $|\xi| = 1$ 有 $|\partial^\alpha \sigma(\xi)| \leqslant C_\alpha$. 那么交换子 $[A,H]$ 是一阶正则化算子.

因为 $\mathscr{T}$ 是双边理想,这一引理就使得可以交换 A 型算子 $A_1, A_2, \cdots$ 和 H 型算子 $H_1, H_2, \cdots$ 的位置,以使所有乘积 $A_1H_1A_2H_2\cdots$ 取典型形式 AH (其中 $A = A_1A_2\cdots, H = H_1H_2\cdots$); AH 的象征是 $a(x)\sigma(\xi)$,从而 Cadelron 定理得证.

为证明引理 6,举例说,我们写出等式 $D_j[A,H] = A_jH + [A,T_j]$,这里 A_j是 $\partial/\partial x_j a(x)$ 作的逐点乘法算子,而 $T_j = D_jH$. 然后利用交换子定理(定理 4).

4. 拟微分的 Leibniz 法则

考虑两个整数 $m \geqslant 1, s \in [0,m]$ 和一个卷积算子 T,T 借助满足齐次估计 $|\partial^\alpha \tau(\xi)| \leqslant C_\alpha |\xi|^{s-|\alpha|}$的象征来定义.

设 B 是由函数 $b(x)$ 作的逐点乘法算子,对 $0 \leqslant |\beta| \leqslant m$, $b(x)$ 满足 $\| \partial^\beta b(x) \|_\infty \leqslant C < \infty$.

我们提出如下问题:找到一个与乘积导数的 Leibniz 法则类似的伪微分法则.

定理 6 沿用前面的记号,我们有

$$TB = \sum_{|\alpha| \leqslant m} B_\alpha T_\alpha + R_m, \tag{4.1}$$

其中 B_α是由 $\partial^\alpha b(x)$ 作的乘法算子,T_α是一个象征为 $\frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial^\alpha \tau(\xi)$ 的卷积算子,而 R_m在下列意义下是 $m-s$ 阶正则

化算子

$$\| R_m \partial^\gamma f \|_2 \leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant m} \| \partial^\beta b \|_\infty \| f \|_2, |\gamma| = m - s. \quad (4.2)$$

初看起来，等式（4.2）无非是一个计算两个微分算子的乘积的象征的公式，这里的新意在于关于 b 的正则性假设是最少的.

定理 6 属于 Calderon（[137]），它使由定理 5 所叙述的伪微分算法更精致. 我们再次援引 $T(1)$ 定理证明这一结果. 为方便证明，我们把象征为 τ 的算子 T 代以它的逼近，这些逼近的象征是在 0 和无穷远的邻域内被截断了的. 这些逼近仍记作 T 而不致引起混淆. 在得到一致估计的条件下，过渡到极限不会有任何问题.

以 $K(x,y)$ 表示 T 的核，那么 T_α 的核是 $\frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha K(x,y)$，而 R_m 的核是

$$R_m(x,y) = \{b(y) - \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha \partial^\alpha b(x)\} K(x,y).$$

还有 $R_m \partial^\gamma$ 的核是 $(-1)^{|\gamma|} \partial_y^\gamma R_m(x,y)$.

首先指出如何把问题归结为 $s=0$ 的情形. 为了从 s 过渡到 $s-1$，把 T 分解为 $T_1 D_1 + \cdots + T_n D_n$，这里 T_j 的象征 $\tau_j(\xi)$ 是 $s-1$ 阶的. 举例说，可令 $\tau_j(\xi) = -i\xi_j |\xi|^{-2} \tau(\xi)$. 那么

$$\begin{aligned} T_B &= T_1 D_1 B + \cdots + T_n D_n B = T_1 B_1 + \cdots + T_n B_n \\ &= T_1 B D_1 + \cdots + T_n B D_n. \end{aligned}$$

如果定理对于数偶 $(s-1, m-1)$ 和 $(s-1, m)$ 已经证明，我们可以借助（4.1）分解 $T_j B_j$ 和 $T_j B$ 并得到两个误差项 $R_m^{(j)}$ 和 $S_m^{(j)}$，它们分别是 $m-s$ 阶和 $m-s+1$ 阶的. 那么 $R_m = R_m^{(1)} + \cdots + R_m^{(n)} + S_m^{(1)} D_1 + \cdots + S_m^{(n)} D_n$ 将是 $m-s$ 阶的正则化算子.

我们要把 $T(1)$ 定理应用到算子 $R_m \partial^\gamma$，$|\gamma| = m$，$s=0$. 为此，利用一个关于 x 和 y 有某种正则性的核比较适宜. $R_m(x,y)$ 包含出现 $\partial^\alpha b(x)$（$|\alpha| = m$）的项；这个函数属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$，而这些项应

当个别处理.

于是考虑核 $\partial^\beta b(x)\partial_y^\gamma\{(y-x)^\alpha K(x,y)\}$, $|\alpha|=|\gamma|=m$. 对应的算子在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的，这是因为可以忽略 $\partial^\beta b(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$；并且 $\partial_y^\gamma\{(y-x)^\alpha K(x,y)\}$ 是一个以 $\xi^\gamma\partial^\alpha\tau(\xi)$ 为象征的卷积算子，而由假设 $\xi^\gamma\partial^\alpha\tau(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

这些特殊情形处理好后，再应用 Leibniz 法则计算 $\partial_y^\gamma R_m(x,y)$. 这就要要么对 $K(x,y)$ 求导数，要么对 $b(y)-\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha\partial^\alpha b(x)$ 求导数. 在后一种情形，这归结为同时以 $\partial^\beta b(y)$ 代替 $b(y)$ 和以 $m-|\beta|$ 代替 m. 对整数 m 进行归纳推理，就可限于仅对 $K(x,y)$ 求导数的情形，于是令

$$Z_m(x,y)=\{b(y)-\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha\partial^\alpha b(x)\}\partial_y^\gamma K(x,y).$$

用 z_m表示对应的算子. 正是对这个算子，我们要应用 $T(1)$ 定理. 由于对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$和 $\beta\in\mathbb{N}^n$有

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|\leqslant C_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|},$$

核的大小和正则性的估计可直接得到.

所留下的事情是验证弱连续性和计算 $Z_m(1)$ 及 $Z_m^*(1)$.

若 u 是一个紧支 C^1类函数，可通过对变量 y 进行分部积分来计算 $Z_m(u)$. 也就是说，$\partial_y^\gamma K(x,y)$ 变作 $\partial_y^{\gamma'}K(x,y)$，这里 $|\gamma'|=|\gamma|-1$，并且或对 $b(x)$ 求导数，或对 $u(y)$ 求导数. 在第一种情形，得到一个 z_{m-1}型的算子，根据归纳法假设，它是有界的，而在第二种情形，得到一个核，它满足 $|Y_m(x,y)|\leqslant C(b)|x-y|^{-n+1}$, Y_m的奇异性是可积的，我们就不作进一步的讨论了.

利用同样的思想计算 $Z_m(1)$，我们得到 $Z_m(1)=(-1)^{|\gamma|}T(\partial^\gamma b)$. 由于 T 是一个 Calderon-Zygmund 算子，并且 $\partial^\gamma b\in L^\infty$，故 $Z_m(1)$ 这个函数属于 BMO.

最后处理 ${}^tZ_m(1)=\int Z_m(x,y)dx$，我们把它视作 y 的函数，利

用 $K(x,y)$ 是一个卷积的核这一事实可以写出等式 $\partial_y^\gamma K(x,y) = (-1)^{|\gamma|}\partial_x^\gamma K(x,y)$. 于是可以通过对 x 的分部积分来计算 $'Z_m(1)$. 更精确地说，若 $\gamma = (\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，$\gamma_j \geqslant 1$，令 $\gamma' = (\gamma_1,\cdots,\gamma_j - 1,\cdots,\gamma_n)$，$\bar{\alpha} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_j + 1,\cdots,\alpha_n)$. 分部积分后得

$$'Z_m(1) = (-1)^l \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{1}{\alpha!}\int (y-x)^\alpha \partial_x^{\gamma'} K(x,y)\partial^{\bar{\alpha}} b(x)dx.$$

其中利用了等式

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \{b(y) - \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha \partial^\alpha b(x)\}$$

$$= - \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha \partial^{\bar{\alpha}} b(x).$$

注意到 $\partial^{\bar{\alpha}} b \in L^\infty$，$(y-x)^\alpha \partial^{\gamma'} K(x,y)$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子的核，并且这个 Calderon-Zygmund 算子从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 是有界的，即得结论

5. 高阶交换子

设 $H: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 是 Hilbert 变换，其象征是 $-i\operatorname{sign}\xi$. H 也可以定义为同分布 v. p. $\frac{1}{\pi x}$ 作的卷积.

令 $D = i\frac{d}{dx}$，并考虑算子 $D^k H$. 对应的象征 $\tau(\xi)$ 是 $-i\xi^k \operatorname{sign}\xi$，显然若 $\xi \neq 0$，$\tau(\xi)$ 满足 $\left|\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m \tau(\xi)\right| \leqslant C(m)|\xi|^{k-m}$. 事实上，$C(m) = k(k-1)\cdots(k-m+1)$.

1966 年以来，Calderon 建议研究如下定义的累次交换子，从 k 个 Lipschitz 函数 $a_1(x),\cdots,a_k(x)$ 出发，用 $A_1,\cdots,A_k$ 表示由 $a_1(x),\cdots,a_k(x)$ 作的逐点乘法算子，构造用下式定义的算子 Γ_k

$$k!\Gamma_k = [A_1,[A_2,\cdots,[A_k,D^k H]\cdots]]. \qquad (5.1)$$

当 $k \geqslant 2$ 时 Γ_k 的定义会发生问题. 举例说，$\Gamma_2 = A_1A_2T_2 - A_1T_2A_2 - A_2T_2A_1 + T_2A_1A_2$，其中 $T_2 = D^2H$. $A_1T_2A_2$ 或 $A_2T_2A_1$ 这两项作

为 $\mathscr{D}$ 到 $\mathscr{D}'$ 的算子是否有意义这件事不是一个能明白回答的问题. 事实上,展开 Γ_2并非上策,我们宁愿利用另一方法给 Γ_2以意义.

后面将验证 Γ_k的分布核是

$$\frac{ik}{\pi}\text{v. p.}\frac{(a_1(x)-a_1(y))\cdots(a_k(x)-a_k(y))}{(x-y)^{k+1}}.$$

在一定程度上形式地看来，可以说 $\frac{ik}{\pi}\text{v. p.}\,(x-y)^{-k-1}$ 是 $T_k=\frac{1}{k!}D^kH$ 的分布核,而一个算子与 A_j每作一次交换子运算,就相当其核乘以 $a_j(x)-a_j(y)$.

若所有函数 $a_j(x)$ 相等并且是实值的,那么不计系数 $-i/2$,对 $\delta>0$,母级数 $\sum_0^\infty\delta^k\Gamma_k$是由 Cauchy 核 $\frac{1}{2\pi i}(z(x)\text{-}z(y))^{-1}$定义的算子,其中 $z(x)=x-i\delta a(x),x\in\mathbb{R}$,以 $z(x)$ 作为参数表示的曲线 Γ 是一个 Lipschitz 函数(即函数 $-\delta a(x)$) 的图象. 问题变为核 $\frac{1}{2\pi i}\text{v. p.}\int_\Gamma\frac{f(w)}{z-w}dw$ 在 $L^2(\Gamma,ds)$ 上的连续性问题. 其中 ds 是 Lipschitz 图象 Γ 上的弧长测度. 这个连续性问题将在本章末解决,并将在第 12 章里重新系统研究.

Calderon 就高阶交换子和复分析之间的关系进行了大量研究.

当我们置身于 $\mathbb{R}^n$并以一个卷积算子 T_k代替 D^kH 时,同复分析的这种联系便消失殆尽,这里 T_k的象征 $\tau(\xi)$ 当 $\xi\neq0$ 时满足“齐次型”估计

$$|\partial^\alpha\tau(\xi)|\leqslant C(\alpha)|\xi|^{k-|\alpha|},\xi\neq0,\alpha\in\mathbb{N}^n. \tag{5.2}$$

仍用 $a_1(x),\cdots,a_k(x)$ 表示 k 个 Lipschitz 函数,而用 $A_1,\cdots,A_k(x)$ 表示相应 $a_1(x),\cdots,a_k(x)$ 的逐点乘法算子. 利用这些记号,我们有

定理 8 累次交换子 $\Gamma_k=[A_1,[A_2,\cdots,[A_k,T_k]\cdots]$ 都是

Calderon-Zygmund 算子，且 Γ_k的 $L^2 \to L^2$范数 $\|\Gamma_k\|$ 满足

$$\|\Gamma_k\| \leqslant C(k,n,\tau)\|\nabla a_1\|_\infty\cdots\|\nabla a_k\|_\infty, \qquad (5.3)$$

其中常数 $C(k,n,\tau)$ 事实上仅依赖出现在 (5.2) 中的常数 $C(\alpha)$.

定理的这种表达方式使我们可以利用逼近 T_k的标准技术来证明之. 为此，以象征 $\tau_m(\xi)=\chi(m^{-1}\xi)(1-\chi(m\xi))\tau(\xi)$ 代替象征 $\tau(\xi)$，这里 $\chi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 0 的邻域里等于 1. 诸象征 τ_m关于 m 一致地满足 (5.2)，这就允许在 $\tau(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 且在 0 的邻域里等于 0 的补充假设之下证明了定理之后过渡到极限.

T_k的核 $K(x,y)$ 是一个卷积核，定性地说，$K(x,y)$ 是一个无限可导的函数，对所有 $N\geqslant 1$，当 $|y-x|$ 趋于无穷时，$K(x,y)$ 有阶 $O(|y-x|^{-N})$. 定量地说有

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|\leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-k-|\alpha|-|\beta|}. \qquad (5.4)$$

于是 Γ_k的核 $L(x,y)$ 是 $(a_1(x))-a_1(y))\cdots(a_k(x)-a_k(y))k(x,y)$，并且 $L(x,y)$ 显然满足 Calderon-Zygmund 估计.

为了证明 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性，我们利用对 k 的归纳法以及 $T(1)$ 定理.

首先证明 Γ_k的弱连续性. 为此，设 f 是一个紧支 C^1类函数，我们来计算 Γ_k. 计算中用等式 $T_k=S_k^{(1)}D_1+\cdots+S_k^{(n)}D_n$，这里 $S_k^{(j)}$的象征满足 (5.2)，只不过以 $k-1$ 代替 k，而 $D_j=\partial/\partial x_j$. 把 $S_k^{(j)}$的核记作 $S_k^{(j)}(x,y)$，则有

$$\Gamma_k(f)=\sum_1^n\int(a_1(x)-a_1(y))\cdots(a_k(x)-a_k(y))\frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$\times S_k^{(j)}(x-y)f(y)dy.$$

进行分部积分后产生两种类型的项，在第一种类型的项中，对 $(a_1(x)-a_1(y))$ 或 $a_2(x)-a_2(y)$ 等等求导，这类项有形式

$$\Gamma_{k-1}^{(1)}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}f\right),\Gamma_{k-1}^{(2)}\left(\frac{\partial a_2}{\partial y_j}f\right),\cdots,$$

由归纳法假设可估计它们的 L^2范数. 在第二种类型的项中，对 f

求导. 这时所用的核是

$(a_1(x)-a_1(y))\cdots(a_k(x)-a_k(y))S_k^{(j)}(x-y)$，其模不超过 $C\|\nabla a_1\|_\infty\cdots\|\nabla a_k\|_\infty|x-y|^{-n+1}$；由于假设了 f 有紧支集且属于 C^1 类，L^2 范数的估计是显而易见的.

上述计算过程确切地对 C^1 类的紧支函数 f 定义了 $\Gamma_k(f)$，并且给出了 Γ_k 的弱连续性.

$\Gamma_k(1)$ 的计算完全是同一类型的. 重复前面的推演得知 $\Gamma_k(1)$ 有诸项 $\Gamma_{k-1}^{(j)}(D_ja_l)$ 的线性组合的形式，这里 $D_j=\partial/\partial x_j$. 由归纳假设这些项属于 BMO. 最后 $'\Gamma_k$ 除去以 $'T_k$ 代替 T_k 外与 Γ_k 有完全相同的结构. 从而同样有 $'\Gamma_k(1)\in \mathrm{BMO}$.

6. Takafumi Murai 所给的 Cauchy 核的 L^2 连续性的证明

我们返回一维以及"历史上"的 Calderon 交换子，即从一个 Lipschitz 函数 A：$\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 出发，这对应一个属于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ 的分布 v. p. $\dfrac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$，进而对应以这个分布为核的算子 Γ_k：$\mathscr{S}(\mathbb{R})\to\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. 于是对 C^1 类紧支的 f 和 g 有

$$\langle\Gamma_k(f),g\rangle=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geq\epsilon}\frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}g(x)f(y)dydx.$$

Γ_k 的 L^2 连续性从前节的一般结果得到. 由此推出对所有 $f\in L^2(\mathbb{R})$，对几乎所有 $x\in\mathbb{R}$ 存在

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\{|y-x|\geq\epsilon\}}\frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}f(y)dy.$$

利用第 7 章的一般结果 (Cotlar 不等式) 可以看出只需证明当 f 是一个 C^1 类的紧支函数时这个极限的存在性. 注意到 $\dfrac{\partial}{\partial y}(x-y)^{-k}=k(x-y)^{-k-1}$ 并进行分部积分，跟前节一样，得到两种类型的项. 一类项归结到算子 Γ_{k-1}，由归纳假设和 $A'f\in L^2$ 这一事

实即可处理.另一类项包含对 f 的导数,这归结为一个绝对收敛的积分.由于对几乎所有的 x 有

$$A'(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(A(x+\varepsilon) - A(x-\varepsilon))}{2\varepsilon},$$

积出的项趋于 0.

于是对于所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和所有的 $k \in \mathbb{N}$,对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$ 有等式

$$\Gamma_k f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} \frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}} f(y) dy.$$

最后一个注释涉及算子 $\Gamma_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 的范数 $\| \Gamma_k \|$ 的增长性.

前节的方法在这里可概括为 $\Gamma_k(1) = \Gamma_{k-1}(A')$ 和对 $k \in \mathbb{N}$ 使用归纳法.考虑到核 $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$ 的大小和正则性的显然的估计即得 $\| \Gamma_k \| \leqslant \pi C^k \| A' \|_\infty^k$.所使用的方法无法估量这个常数 C 的值;它来自两个乘法因子.其中一个是不等式

$$\| T \| \leqslant C_0 \| T(1) \|_{\mathrm{BMO}} + C_1 \tag{6.1}$$

不知其精确估值的常数 C_0,这里 T 由满足 $|K(x,y)| \leqslant |x-y|^{-1}$和 $|\partial/\partial x K(x,y)| \leqslant |x-y|^2$的反对称核 $K(x,y)$ 定义.另一个乘法因子出现在应用所有 Calderon-Zygmund 算子从 L^∞ 到 BMO 连续这一事实时,事实上,这两个问题联系着第三个问题:缺少一个 Calderon-Zygmund 算子的 (L^∞, BMO) 连续性范数的估计.

不过可以注意到当 $\delta > 0$ 充分小时,母级数 $\sum_0^\infty \delta^k \Gamma_k$按算子范数收敛.由此即可证明在斜率小于 δ 的 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的连续性.这正是 Calderon 在 1974 年([38])所得到的结果.

而由这个"局部"结果可得下列"整体"结果:若 $A:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是任意一个 Lipschitz 函数,则核 $(x-y+i(A(x)-A(y))^{-1}$定义一

个在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界的算子.

我们要给的证明基于 G. David ([93]) 的一个基本思想:考虑相应所有满足 $\|A'\|_\infty \leqslant (3/2)^k$的 Lipschitz 函数的算子的集合 $\mathscr{E}_k$,并利用"旭日引理"通过对 k 的归纳推理证明算子 $T \in \mathscr{E}_k$ 的连续性.

David 的证明比我们要叙述的 T. Murai 的证明稍许复杂. Murai 考虑算子 T_A,其分布核是 v. p. $E_A(x,y)$,这里

$$E_A(x,y) = \frac{1}{x-y}\exp\left(i\,\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right).$$

这个算子具有下列值得注意的性质:

若 λ 是一个实常数并且 $B(x) = \lambda x + A(x)$,则

$$T_B = e^{i\lambda}T_A, \tag{6.2}$$

若 $B = -A$,则 $T_B = -T_A^*$, (6.3)

$\int_0^\infty T_{\lambda A}e^{-\lambda}d\lambda$ 是 Cauchy 算子(由核 $(x-y-i(A(x)-A(y))^{-1}$ 定义), (6.4)

$$\|T_A\| \leqslant \pi\exp(C\|A'\|_\infty),\ C \text{ 为某一常数}. \tag{6.5}$$

前三个断言是显然的,而最后一个只需把 T_A展开成 $\sum_0^\infty \frac{i^k}{k!}\Gamma_k$ 并利用 $\|\Gamma_k\| \leqslant \pi C^k\|A'\|_\infty^k$即可得到.

如果能够用一个缓慢增长代替(6.5)中出现的指数增长,Cauchy 核的连续性(对 $\|A'\|_\infty$不加限制时)将是显然的. 这个关于 λ 的缓慢增长将由(6.4)中的 $e^{-\lambda}$补偿,而所写的积分按算子范数收敛.

为估计 $\|T_A\|$,利用 $T(1)$ 定理得

$$\|T_A\| \leqslant C_0\|T_A(1)\|_{\mathrm{BMO}} + C_1(1+\|A'\|_\infty), \tag{6.6}$$

而 BMO 范数的定义是

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_I \inf_{\gamma\in\mathbb{C}} \frac{1}{|I|}\int_I |b(x)-\gamma|\,dx.$$

(6.6) 右端第二项来自 $|E_A(x,y)|$ 和 $|\partial/\partial x E_A(x,y)|$ 的明

显的估计.

我们要证明当 $A(x)$ 是实值函数时 有

$$\| T_A \| \leqslant C(1 + \| A' \|_\infty)^5. \tag{6.7}$$

事实上，只需对 $\| T_A(1) \|_{BMO}$证明相应的不等式. 基本想法是用 $\mathscr{E}_k$表示所有满足 $0 \leqslant A'(x) \leqslant (3/2)^k$的算子 T_A的集合，并用对 k 的归纳法证明，若 $T_A \in \mathscr{E}_k$，则有 $\| T_A(1) \|_{BMO} \leqslant C(1 + (3/2)^k)^5$. 从 $\mathscr{E}_k$过渡到 $\mathscr{E}_{k+1}$ 的可能性由用于 $A(x)$ 的图象的所谓旭日引理保证. 注意到下列事实是适宜的：特殊情形 $0 \leqslant A'(x) \leqslant M$ 可用来处理一般情形 $-M \leqslant A'(x) \leqslant M$. 为确信这一点，只需对 $B = Mx + A(x)$ 利用 (6.2)；这时有 $0 \leqslant B'(x) \leqslant 2M$，相应 T_B 即属特殊情形.

旭日引理

下面的叙述摘自 [239] 第 31 页，用 $I = [a,b]$ 表示一个实数区间，而用 $A(x)$ 表示一个在 I 上递增且满足 Lipschitz 条件的函数，于是在 I 上有 $0 \leqslant A'(x) \leqslant M$. 令 $m = \dfrac{A(b) - A(a)}{b - a}$，而 λ 是一个满足 $0 \leqslant \lambda \leqslant m$ 的"阈值".

定义 $B_I(x)$ 如下

$$B_I(x) = \lambda x + \sup_{a \leqslant t \leqslant x} (A(t) - \lambda t). \tag{6.8}$$

换句话说，$B_I(x) - \lambda x$ 是对所有 $x \in I$ 满足 $B_I(x) - \lambda x \geqslant A(x) - \lambda x$ (即在整个 I 上 $B_I(x) \geqslant Ax$) 的最小增函数.

由于 $A(x)$ 是 Lipschitz 连续的，$B_I(x)$ 也是这样. 事实上，若 $a \leqslant x \leqslant x' \leqslant b$，我们有

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant x'} (A(t) - \lambda t) \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant x} (A(t) - \lambda t) + (m - \lambda)(x' - x).$$

由此推出

$$B_I(x') - B_I(x) \leqslant M(x' - x).$$

另外还有

$$B_I(x') - B_I(x) \geqslant \lambda(x' - x).$$

于是可用下列性质定义 $B_I(x)$：在 I 上几乎处处 $B_I'(x) \geqslant \lambda$，在 I

上 $B_I(x) \geqslant A(x)$，并且 $B_I(x)$ 是具有这两个性质的最小的 Lipschitz 连续函数（甚至是具有这两个性质的最小的绝对连续函数）.

把 $[a,b]$ 中满足 $B_I(x)=A(x)$ 的 x 的紧集称为 E，其在 $[a,b]$ 中的余集记作 Ω. 注意到 $a\in E$ 这一点是重要的. 而 b 可能不属于 E. 这表明 Ω（若它不是空的）由互不相交的区间 $]a_k,b_k[$（或许还有一个区间 $]a',b]$ 组成）.

利用这些记号，可叙述"旭日引理"如下：

引理 6 在 Ω 的每个连通分支 I_k 上我们有 $B_I(x)=\lambda x+c_k$，并且 Ω 的测度 $|\Omega|$ 满足 $|\Omega|\leqslant \dfrac{M-m}{M-\lambda}|I|$.

为证旭日引理，先令 $f(x)=A(x)-\lambda x$ 和 $F(x)=B_I(x)-\lambda x$，从而把定理的证明归结为 $\lambda=0$ 的情形. 于是 $F(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)$. 由 E 的定义，对所有毗连 E 的区间 $]a_k,b_k[$，我们有 $F(a_k)=f(a_k)$ 和 $F(b_k)=f(b_k)$. 由于 F（在广义的意义下）是递增的，我们有 $F(b_k)\geqslant F(a_k)$. 要证 $F(b_k)=F(a_k)$，从而得到 $F(x)$ 在 $[a_k,b_k]$ 上是常数. 而这正是必须证明的. 若 $F(b_k)=f(b_k)>f(a_k)=F(a_k)$，选取 $c_k\in\,]a_k,b_k[$，使 $f(c_k)>f(a_k)$，并选取 $d_k\in\,]a_k,c_k[$，使 $f(d_k)=\max\limits_{a_k\leqslant x\leqslant c_k} f(x)$. 由此推出 $F(d_k)=f(d_k)$，从而 $d_k\in E$，这就违反了 $]a_k,b_k[$ 的定义.

最后考虑 $]a',b]$ 是 Ω 的一个连通分支的情形. 这时有 $F(b)>f(b)$ 和 $F(a')=f(a')$. 注意对某 $c,a'\leqslant c<b,F(b)=f(c)$. 若有 $F(b)>F(a')$，那么 $a'<c$ 并且 $F(c)=f(c)$. 这与 Ω 的定义矛盾. 从而有 $F(b)=F(a')$.

为了估计 $|\Omega|$. 我们注意 $A(a)=B_I(a)$. 于是

$$A(b)-A(a)\leqslant B_I(b)-B_I(a)$$

$$=\int_a^b B_I'(x)dx = \int_E B_I'(x)dx + \int_\Omega B_I'(x)dx$$
$$\leqslant M|E| + \lambda|\Omega| = M|I| - (M-\lambda)|\Omega|.$$

我们将要用到的推论涉及到当 x 和 y 属于同一区间 I 时核 $E_A(x,y)$ 的性状. 用旭日引理提供的函数 B_I代替 A（我们将看到为什么这种代替是有用的). 把 B_I记成 B 以简化记号. 由于

$$|B_I(x) - A(x)| = B_I(x) - A(x) \leqslant M\text{dist}(x,E),$$

我们有

$$|E_A(x,y) - E_B(x,y)|$$
$$\leqslant M(x-y)^{-2}(\text{dist}(x,E) + \text{dist}(y,E)). \tag{6.9}$$

为 估算当 $0 \leqslant A'(x) \leqslant M$ 时 Calderon-Zygmund 算子 T_A的范数的上界,我们引进下列估计量

$$\sigma(A,I) = \int_I \left|\int_I E_A(x,y)dy\right| dx = \| T_A(\chi_I) \|_{L^1(I)}.$$

这个估计量首先由 J. L. Journé 在宣布"$T(1)$ 定理"的一篇短文中考虑过.

再令 $\sigma(A) = \sup\limits_I \dfrac{\sigma(A,I)}{|I|}$,最后令

$$\tau(M) = \sup\{\sigma(A), 0 \leqslant A'(x) \leqslant M\}. \tag{6.10}$$

我们要证明下列两个引理.

引理 7 存在一个常数 C_0,使得

$$\| T_A(1) \|_{\text{BMO}} \leqslant \sigma(A) + C_0(1 + \| A' \|_\infty). \tag{6.11}$$

引理 8 存在一个常数 C_1，使得对所有 $M>0$

$$\tau(M) \leqslant 4\tau\left(\frac{2M}{3}\right) + C_1(1+M). \tag{6.12}$$

这两个引理很容易给出估计 (6.7). 出发点是当 $\| A' \|_\infty \leqslant 1$ 时算子 T_A的连续性. 直接把 $T(1)$ 定理应用于我们曾提及的

Calderon 交换子即可得到这个连续性.

考虑区间 $(3/2)^k \leqslant M \leqslant (3/2)^{k+1}$,步步递推,从估计 (6.12) 可得 $\tau(M) \leqslant C_2(1+M)^5$.

尔后从引理 7 推出 $\| T_A(1) \|_{\text{BMO}} \leqslant C_3(1+\|A'\|_\infty)^5$,再由 $T(1)$ 定理即得结论.

于是所剩下的就是证明这两个引理.

第一个引理的证明是简单的,并建立在估计 $|E_A(x,y)| \leqslant |x-y|^2$和 $|\partial/\partial x EA(x,y)| \leqslant (1+M)(x-y)^{-2}$ 的基础上. 我们期望证明对所有区间 $I \subset \mathbb{R}$,对某一常数 γ_I有

$$\frac{1}{|I|}\int_I |T_A(1)-\gamma_I|dx \leqslant \sigma(A,I)+C(1+M). \quad (6.13)$$

为此目的,把函数分解成 $f+u+v+w$,其中 f 是 I 的指示函数,u 和 v 是与 I 毗邻的长度为 $|I|$ 的两个区间 J 和 J' 的指示函数,而 w 是 $3I$ 的余集的指示函数.

我们有 $\int_I\int_I |x-y|^{-1}dxdy = (\log 2)|I|$,对 J' 有同样的结果. 于是有 $\int_I |T_A(u)dx| \leqslant (\log 2)|I|$. 对 $\int_I |T_A(v)|dx$ 有同样的结果. 最后核关于 x 的正则性允许对所有 $x \in I$ (其中心是 x_0) 估计 $\int_{(3I)^c} |E_A(x,y)-E_A(x_0,y)|dy$.

现在过渡到引理 8 的证明. 这个引理正是 David 和 Murai 方法的关键.

先作如下注释:若在 I 上 $B(x)=A(x)+px+q, p\in\mathbb{R}, q\in\mathbb{R}$,或在 I 上 $B(x)=A(x)$,则有 $\sigma(B,I)=\sigma(A,I)$.

我们打算在区间 I 上用 $B(x)$ 代替 $A(x)$,希望在占相当份额的部分 E 上 $A(x)=B(x)$;我们要求 $|E| \geqslant \frac{1}{4}|I|$. 并且期待函数 $B(x)$ 在整个区间 I 上满足 $\frac{M}{3} \leqslant B'(x) \leqslant M$. 用 $B'(x)-\frac{M}{3}$ 代替 $B'(x)$,便把 M 换成 $2M/3$ 从而"减小了斜率".

我们给出推演的细节. 记 $I=[a,b]$, 并区分 $m=\frac{A(b)-A(a)}{b-a}\geqslant\frac{M}{2}$ 和 $m=\frac{A(b)-A(a)}{b-a}<\frac{M}{2}$ 两种情形. 在第一种情形直接对 $\lambda=M/3$ 援引旭日引理,从而得到 $|\Omega|\leqslant 3/4|I|$.

在第二种情形,用 $\widetilde{A}(x)=Mx-A(x)$ 代替 $A(x)$. 我们有 $\sigma(\widetilde{A},I)=\sigma(A,I),0\leqslant\frac{d}{dx}\widetilde{A}(x)\leqslant M$ 和 $\frac{\widetilde{A}(b)-\widetilde{A}(a)}{b\text{-}a}\geqslant\frac{M}{2}$, 这就归结到第一种情形. 对 A(或 $\widetilde{A}$) 应用旭日引理,其中取 $\lambda=M/3$,得到一个函数记之为 B(代替 B_I) 以简化记号. 最后令 $\widetilde{B}(x)=B(x)-Mx/3$,我们有 $\frac{d}{dx}\widetilde{B}(x)\in[0,2M/3]$. 由增长指标函数 τ 的定义得 $\sigma(B,I)=\sigma(\widetilde{B},I)\leqslant\tau\left(\frac{2M}{3}\right)|I|$.

为比较 $\sigma(A,I)$ 和 $\sigma(B,I)$,我们先写下后面要证基本不等式

$$\sigma(A,I)\leqslant\sigma(B,I)+\sum_{k\geqslant 0}\sigma(A,I_k)+C(1+M)|I|. \tag{6.14}$$

其中 I_k 是把旭日引理(对 $\lambda=M/3$) 应用到 A (或 $\widetilde{A}$) 时生成的开集 $\Omega\subset I$ 的连通分支.

一旦 (6.14) 得证,即可得到结论. 事实上,由 $\sigma(A,I_k)\leqslant\sigma(A)|I_k|$ 和 $\sum|I_k|\leqslant 3/4|I|$ 推出

$$\sigma(A,I)\leqslant\tau\left(\frac{2M}{3}\right)|I|+\frac{3}{4}\sigma(A)|I|+C(1+M)|I|. \tag{6.15}$$

(6.15) 两端除以 $|I|$, 并在左端关于所有区间取上确界得

$$\sigma(A)\leqslant\tau\left(\frac{2M}{3}\right)+\frac{3}{4}\sigma(A)+C(1+M). \tag{6.16}$$

由于所有算子 T_A 是 Calderon-Zygmund 算子,我们知道 $\sigma(A)$ 是有限的. 遂得

$$\sigma(A)\leqslant 4\tau\left(\frac{2M}{3}\right)+4C(1+M). \tag{6.17}$$

只需在（6.17）左端关于所有满足 $0\leqslant A'(x)\leqslant M$ 的 A 取上确界即得（6.12）.

还剩下的是（6.14）的证明. 我们已知

$$E_A(x,y)=E_B(x,y)+R(x,y), \tag{6.18}$$

其中误差项 $R(x,y)$ 满足

$$|R(x,y)|\leqslant M(x-y)^{-2}(\operatorname{dist}(x,E)+\operatorname{dist}(y,E)). \tag{6.19}$$

我们还知道在组成 Ω 的每个区间 I_k 上有 $B(x)=\lambda x+c_k(\lambda=M/3)$，并且若 x 和 y 属于同一区间 I_k，则有 $E_B(x,y)=e^{i\lambda}(x-y)^{-1}$.

这两个性质足够用来证明（6.14）. 事实上

$$\begin{aligned}\sigma(A,I)&=\int_I\left|\int_I E_A(x,y)dy\right|dx\\&\leqslant\int_I\left|\int_I E_B(x,y)dy\right|dx+\int_I\left|\int_I R(x,y)dy\right|dx\\&=\sigma(B,I)+\eta.\end{aligned}$$

为估计误差项 η，用 G 表示不属于集 $I_k\times I_k$ 的并集的点对 $(x,y)\in I\times I$ 的集合；即 x 和 y 不属于同一区间 I_k. 那么

$$\eta\leqslant\iint_G|R(x,y)|dxdy+\sum_{k\geqslant 0}\int_{I_k}\left|\int_{I_k}R(x,y)dy\right|dx.$$

估计 $\iint_G|R(x,y)|dxdy\leqslant 4M|I|$ 直接源于（6.19）. 尚需处理项 $\sigma_k=\int_{I_k}\left|\int_{I_k}R(x,y)dy\right|dx$. 为此，由（6.18）得

$$\sigma_k\leqslant\int_{I_k}\left|\int_{I_k}E_A(x,y)dy\right|dx+\int_{I_k}\left|\int_{I_k}E_B(x,y)dy\right|dx.$$

第一个积分取值 $\sigma(A,I_k)$，而第二个由我们开头作的注释得以计算. 它等于 $\int_{I_k}\left|\int_{I_k}\frac{dy}{x-y}\right|dx\leqslant\pi|I_k|$，这是由于 Hilbert 变换在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是酉变换.

7. Calderon 和 Zygmund 旋转法

旋转法允许对作用在单个实变量函数上的 Calderon-Zygmund 算子在所有方向取平均(或 Bochner 积分)，以便构造作用在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Calderon-Zygmund 算子.

当今这一方法成为由 R. Coifman 和 G. Weiss ([77]) 系统发展的变换法的典型.

举例来说，Calderon-Zygmund 利用旋转法建立 Riesz 变换 R_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ 在空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 上的连续性，他们把这一结果作为对 Hilbert 变换相应结果的推论.

旋转法及本节所使用的其它技术基于算子通过其核的刻画. 即从一个函数 $K(x,y)$ 出发，为避免奇异积分问题，首先假设它属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. 借助 K，举例来说，当 f 属于紧支连续函数的向量空间 E 时由

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)dy \tag{7.1}$$

定义算子 T.

定理 9 设 $K(x,y)$ 是一个属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 的函数，而算子 T 由 (7.1) 定义.

对所有 $x_0\in\mathbb{R}^n$和所有 $v\in S^{n-1}$($\mathbb{R}^n$的单位球面) 构造作用在单实变量函数上且核为

$$k(s,t;x_0,v)=|s-t|^{n-1}K(x_0+sv,x_0+tv), s\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$$

的算子 $T_{(x_0,v)}$.

设 p 是一个指数 (p 属于 $[1,+\infty]$，不排除端点的值). 假定算子 $T_{(x_0,v)}$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上一致有界并且这些算子作用在 $L^p(\mathbb{R})$ 上范数不超过 1. 则 T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界并且 T 的范数不超过 $\frac{1}{2}\omega_{n-1}$ (ω_{n-1} 是 S^{n-1} 的面积).

对 $f \in E$，令 $g = \tau f$. 按中心在 x 的极坐标得

$$\begin{aligned} g(x) &= \int K(x,y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(x,tv)f(x+tv)|t|^{n-1}dt\right\}d\sigma(v) \\ &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} g_v(x)d\sigma(v), \end{aligned}$$

其中

$$g_v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x+tv)f(x+tv)|t|^{n-1}dt.$$

今证 $\| g_v(x) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$，由凸性，这就推出 $\| g \|_p \leqslant \frac{1}{2}\omega_{n-1} \| f \|_p$.

由于 v 固定，我们要变换坐标轴，以使 $v = (0,0,\cdots,0,1)$. 在这个新坐标系里，令 $x = (x', S)$，$x' \in \mathbb{R}^{n-1}$，$S \in \mathbb{R}$. 于是

$$\| g_v \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} |g_v(x'+sv)|^p dx'ds \right)^{1/p}.$$

利用 Fubini 定理，这就导致首先计算

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |g_v(x'+sv)|^p ds \\ =&\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x'+sv, x'+(s+t)v)f(x'+(s+t)v)|t|^{n-1}dt \right|^p ds \\ =&\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x'+sv, x'+tv)f(x'+tv)|t-s|^{n-1}dt \right|^p ds \\ \leqslant&\int_{-\infty}^{\infty} |f(x'+tv)|^p dt \end{aligned}$$

(由于对算子 $T_{(x',v)}$所作的假设). 这就允许进而对 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 积分并结束证明.

怎样应用旋转法呢?

出发点是核 $K(x,y)$，$x \in \mathbb{R}^n$，$y \in \mathbb{R}^n$，$y \neq x$，K 满足

$$K(y,x) = -K(x,y), \tag{7.2}$$

$$|K(x,y)| \leqslant C|(x-y)|^{-n} \tag{7.3}$$

$$|\partial/\partial x_j K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-1}(1 \leqslant j \leqslant n). \tag{7.4}$$

那么分布 v.p.$K(x,y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 定义一个 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的算子 T. 我们希望知道 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是否有界. 为此作核

$$k(s,t;x_0,v) = |s-t|^{n-1}K(x_0+sv, x_0+tv),$$

它这次作为一个变量的函数满足与 (7.3), (7.4) 类似的估计, 并且同样是反对称的.

于是这些核定义算子 $T_{(x_0,v)}$: $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

假定存在某个常数 C, 使对 $x_0 \in \mathbb{R}^n$和 $v \in S^{n-1}$一致成立

$$\| T_{(x_0,v)}(f) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C \| f \|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{7.5}$$

定理 10 在刚作的假设之下, 算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 并且 $\|T\| \leqslant C'$, 这里 C' 仅依赖于维数 n 和出现在 (7.3), (7.4) 以及 (7.5) 中的常数.

为证明定理, 考虑被截断算子 T^ε和 $T^\varepsilon_{(x_0,v)}$, 它们由被截断核

$$K(x,y)\chi_{\{|x-y|\geqslant\varepsilon\}} \text{和 } k(s,t;x_0,v)\chi_{\{|s-t|\geqslant\varepsilon\}}$$

定义. 用 K^ε和 k^ε表示这些被截断核, 而从 K^ε过渡到 k^ε的运算跟从 K 到 k 的运算相同 ("旋转同截断交换").

由定理 9, 对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\| T^\varepsilon \| \leqslant \frac{1}{2}\omega_{n-1} \sup_{x_0} \sup_{v} \| T^\varepsilon_{(x_0,v)} \|. \tag{7.6}$$

而由第 7 章的 Cotlar 定理, 存在常数 C, 使对所有 $\varepsilon > 0$ 有

$$\| T^\varepsilon_{(x_0,v)} f \|_2 \leqslant C \| f \|_2. \tag{7.7}$$

给合 (7.6) 和 (7.7) 即得 $\|T^\varepsilon\| \leqslant C'$. 而核的反对称性保证了若 f 和 g 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中, 当 ε 趋于 0 时, $\langle T^\varepsilon f, g\rangle$ 收敛到 $\langle Tf, g\rangle$. 从而由一致估计 $\|T^\varepsilon\| \leqslant C'$ 推出 T^ε弱收敛到 $T \in \mathscr{L}(L^2, L^2)$.

这里是这种方法的一个值得注意的应用（属于 Calderon）.

定理 11 设 $n \geqslant 1$ 和 $m \geqslant 1$ 是两个整数，$A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个 Lipschitz 函数. 又设 $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是一个无穷可微的奇函数，则反对称核

$$K(x,y) = F\left(\frac{A(x) - A(y)}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n} \tag{7.8}$$

定义一个在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界的算子.

为证明定理，我们利用旋转法把问题归结为 $n=1$ 的情形. 再注意到，由于 F 是奇函数，$F\left(\frac{A(x) - A(y)}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|} = F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x-y}\right)\frac{1}{x-y}$. 最后利用 $|A(x) - A(y)| \leqslant M|x-y|$，可在 $\mathbb{R}^m$ 的球 $|u| \leqslant M$ 上用关于每个变量 $4M$ 周期的无穷可微函数代替 F，把这个函数展开成 Fourier 级数，当 $|u| \leqslant M$ 时，

$$F(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \alpha(k)\exp(i\delta k \cdot u), \delta = \frac{\pi}{2M},$$

其中 $\alpha(k)$ 是速降的. 因而核 $F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x-y}\right)\frac{1}{x-y}$ 可表示为 $\sum \alpha(k) G_k(x,y)$，其中 $G_k(x,y) = \exp\left(i\delta k \cdot \frac{A(x) - A(y)}{x-y}\right) \cdot \frac{1}{x-y}$. 由 $G_k(x,y)$ 定义的算子 G_k 的范数不超于 $C(1+\delta|k|\,\|A'\|_\infty)^5$，从而级数 $\sum \alpha(k) G_k$ 在 $\mathscr{L}(L^2, L^2)$ 中收敛.

今用分别来自势论和复分析的两个例子诠释定理 11. 第一个例子在第 15 章还要更细致地讨论.

设 $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数，$S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是 A 的图象，而 $d\sigma$ 是 S 的面积测度. 从一个电荷密度 $g \in L^2(S, d\sigma)$ 出发，并把由这个电荷密度产生的位势记作 $V(x)$，$x \in \mathbb{R}^{n+1}$. 假定 $n \geqslant 2$，我们

有

$$V(x)=c_n\int_S|x-y|^{-n+1}g(y)d\sigma(y).$$

现在考虑由位势 V 产生的电场. 不计规范化常数，我们有 $\vec{E}=-\mathrm{Grad}V$.

用 $\mathbb{1}$ 表示向量 $(0,\cdots,0,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$. 在静电学里，熟知当穿过曲面 S 时 $\vec{E}(x)$ 产生间断. 对 $x\in S$ 定义

$$\vec{E}_+(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\vec{E}(x+\varepsilon\mathbb{1})\text{ 和 }\vec{E}_-(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\vec{E}(x-\varepsilon\mathbb{1}). \tag{7.10}$$

在第 15 章将证对几乎所有的 $x\in S$，这两个极限存在. 事实上，这些极限的存在性由第 7 章证明的奇异积分算子几乎处处有定义的结果推出. 最后电场的间断性对几乎所有 $x\in S$ 由

$$\vec{E}_+(x)-\vec{E}_-(x)=\gamma_n g(x)\vec{v}(x) \tag{7.11}$$

给定，其中 $\vec{v}(x)$ 是曲面 S 的指向上方的单位法向量 $(\mathbb{1}\cdot\vec{v}(x)>0)$.

今有下列结果.

定理 12 设 $\|\nabla A\|_\infty\leqslant M<\infty$，则对所有函数 $g\in L^2(S,d\sigma)$ 有

$$\left(\int_S|\vec{E}_+(x)|^2d\sigma(x)\right)^{1/2}\leqslant C(M,n)\left(\int_S|g(x)|^2d\sigma(x)\right)^{1/2}, \tag{7.12}$$

其中 $C(M,n)$ 只依赖于 M 和维数 n.

为证明这个结果必须利用一个演算由 $g(x)$ 表示 $E_+(x)$. 这个演算正是 Calderon-Zygmund 算子的演算. 我们有

$$\vec{E}_+(x)=\frac{1}{2}\gamma_n g(x)\vec{v}(x)+\mathrm{v.p.}\,c_n\int_S(\vec{x}-\vec{y})|x-y|^{-n-1}g(y)d\sigma(y), \tag{7.13}$$

当然问题正是出在（7.13）的第二项. 为研究第二项，利用 S 由 $\vec{x} = (u, A(u)), u \in \mathbb{R}^n$，给出的参数表示. 向量核 $(\vec{x} - \vec{y})\ |x - y|^{-n-1}$ 限制在 $L^2(S)$ 上变为

$$\left(\frac{u - v}{(|u - v|^2 + (A(u) - A(v))^2)^{(n+1)/2}}, \right.$$
$$\left. \frac{A(u) - A(v)}{(|u - v|^2 + (A(u) - A(v))^2)^{(n+1)/2}} \right),$$

它要作用在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上.

这后一算子的连续性从定理 11 得到. 对几乎所有的 $x \in S$，(7.10) 中两个极限的存在性将在第 15 章建立.

E. Stein 和 G. Weiss 发现了怎样把上半平面的全纯函数的 Hardy 空间推广到 $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$. 这需要用一个调和函数的梯度代替一个全纯函数的实部和虚部.

那么等式（7.11）就好像是 Plejmej 公式的推广，我们回忆与此有关的问题.

用 Γ 表示复平面上一条无重点的可求长曲线，它以弧长 s 作为参数，s 跑遍了 $]-\infty, +\infty[$. 假定 $\lim\limits_{s \to \infty} |z(s)| = +\infty$ 且 $\lim\limits_{s \to -\infty} |z(s)| = +\infty$. 最后以 Ω_1和 Ω_2表示以 Γ 分界的 $\mathbb{C}$ 的两个区域. 我们把 $H^2(\Omega_1)$ 和 $H^2(\Omega_2)$ 定义为在无穷远为零且极点分别属于 Ω_1和 Ω_2的有理分式 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $L^2(\Gamma; ds)$ 中的闭包.

问题是要知道是否有

$$L^2(\Gamma; ds) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2), \qquad (7.14)$$

其中的和是直和（但一般不是正交和）.

在第 12 章将系统地研究这一问题. 现在就指出（7.14）与由 Cauchy 核通过

$$Tf(z) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - w} f(w) dw$$

定义了 $L^2(\Gamma; ds)$ 上的一个有界算子这一事实的等价性.

利用由弧长给出的参数表示，问题便归结为 $(z(s) - z(t))^{-1}$

是否定义 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个有界算子.

一条可求长曲线 Γ 是一条 Lavrentiev 曲线,如果存在一个常数 $\delta > 0$,使对所有 s 和 t 有 $|z(s) - z(t)| \geqslant \delta|s - t|$.

我们有

定理 13 对所有 Lavrentiev 曲线 Γ,Cauchy 核定义 $L^2(\Gamma; ds)$ 上的一个有界算子,并且这个算子是一个 Calderon-Zygmund 算子.

为证明定理,以 F 表示 $\mathbb{R}^2$ 中一个无穷可微的奇函数,它当 $\delta \leqslant |z| \leqslant 1$ 时同 $1/z$ 重合.于是可写出

$$\frac{1}{z(s) - z(t)} = F\left(\frac{z(s) - z(t)}{s - t}\right)\frac{1}{s - t},$$

然后只需利用定理 11.

第 10 章　相应于奇异积分的算子在 Hölder 或 Sobolev 空间上的连续性

1. 引　言

分数次积分算子由核 $|x-y|^{-n+\lambda}$ 定义，这里 $0<\lambda<n$，这个核在分布意义下的 Fourier 变换是 $c(n,\lambda)$. 核及其 Fourier 变换同时是局部可积的，并且容易证明对所有 $s>0$，同 $|x|^{-n+\lambda}$的卷积是一个从 $\dot{C}^s$到 $\dot{C}^{s+\lambda}$ 的连续算子.

这里所用的空间 $\dot{C}^s$是齐次 Hölder 空间，再次回顾一下它的定义.

若 $0<s<1$，当 f 以指数 s Hölder 连续时，即当

$$|f(y)-f(x)|\leqslant C|y-x|^s$$

时，就说 f 属于 $\dot{C}^s$. 于是 f 以常数为模是一个连续函数. 若 $s=1$，应该用 Zygmund 类 Λ_* 代替通常的空间 C^1，Λ_* 是以仿射函数为模的对所有 $x\in\mathbb{R}^n$和所有 $y\in\mathbb{R}^n$满足

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|\leqslant C|y|$$

的连续函数的空间.

最后若 $s\geqslant 1$，令 $s=m+r$，$f\in\dot{C}^s$表示 f 模阶数 $\leqslant m$ (若 $s=m+1$，$\leqslant m+1$) 的多项式是 C^m类的一个函数且其所有导数 $\partial^\alpha f(|\alpha|=m)$ 属于 $\dot{C}^r$.

开头提及的关于分数次积分的定理可推广到卷积算子以外的算子. 考虑由 $0<\lambda<\gamma<1$ 联系的两个指数 λ 和 γ，假定一个函数 $K(x,y)$ 对所有 x 和 y 满足不等式 $|K(x,y)|\leqslant C|x-$

$y|^{-n+\lambda}$,并且当 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时

$$|K(x',y)-K(x,y)|\leqslant C|x-x'||x-y|^{-n+\lambda-\gamma}. \quad (1.1)$$

假定 $s>0$,并且 $s+\lambda<\gamma$,那么由核 $K(x,y)$ 定义的算子 T 可扩张为空间 $\dot{C}^s$ 上的一个连续线性算子,当且仅当 $T(1)=0$(模常数). 这个断言可一步步重复关于分数次积分算子的论证来证明. 在后一种情形,条件 $T(1)=0$ 自动满足,这是因为 T 是一个卷积算子. 读者可参考 [217] 或 [239].

本章的目标则更进一步,要在前述结论中以 0 代替 λ. 这时对固定的 x,$K(x,y)$ 关于 y 不再是可积的. 我们按照第 7 章的观点,若对所有 $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 和所有不属于 f 的支集的 x 有

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)dy,$$

则说一个弱连续的线性算子 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是相应于 K 的(而不是由 K 定义的).

当假定对 $\lambda=0$ 满足上述假设 (1.1) 时,有必要引进在某种意义下补偿积分 $\int K(x,y)f(y)dy$ 的缺陷的最后一个假设. 这个假设是 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上弱连续,对于 $T:\dot{C}^s\to\dot{C}^s$的连续性这一假设是必要的. 这时对 $0<s<\gamma$,$T:\dot{C}^s\to\dot{C}^s$ 的连续性等价于 $T(1)=0$(模常数函数). 若应用小波,这个结果的证明是相当简单的. 然后我们将沿用 P. G. Lamarié 的方法 ([164]),"手工"证明 T 在齐次 Sobolev 空间 $\dot{B}^s$上的连续性.

最后我们将考查通常 Hölder 或 Sobolev 空间这类更精细的情形.

2. 定理的表述

我们先回忆齐次 Sobolev 空间的定义. 设 $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 是各阶矩为零的函数 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的子空间.

对所有 $s \in \mathbb{R}$，赋予 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 以由

$$\langle f, g \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) |\xi|^{2s} d\xi$$

定义的准 Hilbert 结构. 把相应的 Hilbert 空间记为 $\dot{B}^s$. 我们打算把 $\dot{B}^s$描述为一个函数空间. $s = 0$ 这种情形是平淡的，这时 $\dot{B}^s = L^2(\mathbb{R}^n)$.

先考虑 $-\frac{n}{2} < s < \frac{n}{2}$ 的情形. 若 $0 < s < \frac{n}{2}$，由 $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{s}{n}$ 定义指数 q，根据 Sobolev 嵌入定理(在齐次情形) 我们知道 $\dot{B}^s$ 连续嵌入 $L^q(\mathbb{R}^n)$. ，因而 $\dot{B}^s$是一个函数空间.

若 $-\frac{n}{2} < s < 0$，$\dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$ 是一个缓增分布空间，并且若 $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = -\frac{s}{n}$，则有 $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$. 可以证明 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

若 $s \leqslant -\frac{n}{2}$，不再有包含关系 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$，而应代以 $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$，这里 $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 是由 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的各阶矩为零的函数组成的 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的子空间.

当 $s \leqslant -\frac{n}{2}$ 时包含关系 $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$ 也不复成立，而应代以 $H^p(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s(\mathbb{R}^n)$，这里 $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = -\frac{s}{n}$. 读者会在 [75] 或 [217] 中找到 Stein 和 Weiss 的 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 空间的定义和主要性质.

若 $s = -t$，空间 $\dot{B}^s$和 $\dot{B}^t$在经典的意义下是互相对偶的，这是因为

$$\int f(x)\overline{g}(x)dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) |\xi|^s \overline{\hat{g}}(\xi) |\xi|^t d\xi,$$

并且用 Cauchy-Schwarz 不等式可以估计这一积分的模.

因而当 $s \geqslant \frac{n}{2}$ 时空间 $\dot{B}^s$的性质是当 $t \leqslant -\frac{n}{2}$ 时 $\dot{B}^t$的性质的对偶.

包含关系 $H^1(\mathbb{R}^n)\subset \dot{B}^{-n/2}$ 转换成 $\dot{B}^{n/2}\subset \mathrm{BMO}$，同BMO一样，$\dot{B}^{n/2}$是一个函数空间(模常数).

若 $s=\frac{n}{2}+\gamma,\gamma>0$，$\dot{B}^s$在古典意义下含于齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^\gamma$. 即同 C^γ一样，$\dot{B}^s$是一个连续函数空间(模阶数 $\leqslant\gamma$ 的多项式).

空间 $\dot{B}^s$的齐次性表明，若 $g(x)=ax+b,a>0,b\in\mathbb{R}^n$，$U_g f(x)=a^{-n/2}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$，则 $\|U_g(f)\|_{\dot{B}^s}=a^{-s}\|f\|_{\dot{B}^s}$.

若 $0<s<1$，可不用 Fourier 变换定义 $\dot{B}^s$的范数，对所有 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$c(s,n)\|f\|_{\dot{B}^s}=\left(\iint|f(x)-f(y)|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy\right)^{1/2}.$$

若 $s=1$，$\|f\|_{\dot{B}^1}=\|\mathrm{Grad}f\|_2$，而所有其它的 $\dot{B}^s$ 范数都可借助这两个等式来计算.

以一个连续线性算子 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 作为出发点. 设 $0<\gamma\leqslant 1$，若 T 的分布核限制在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$的开集 $y\neq x$ 上时变为一个函数 $K(x,y)$，它满足

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n},\tag{2.1}$$

当 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x',y)-K(x,y)|\leqslant C|x'-x|^\gamma|x-y|^{-n-\gamma}$, (2.2)

则记 $T\in\mathscr{L}_\gamma$.

若 $\gamma>1$，令 $\gamma=m+r.\ 0<r\leqslant 1$，(2.2) 要换成下面两个条件：

当 $|\alpha|\leqslant m$ 时，$|\partial_x^\alpha K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|}$, (2.3)

当 $|\alpha|=m$ 且 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|\partial_x^\alpha K(x',y)-\partial_x^\alpha K(x,y)|\leqslant C|x'-x|^r|x-y|^{-n-\gamma}$. (2.4)

当 $T\in\mathscr{L}_\gamma$时，对 $|\alpha|\leqslant m$，可定义 $T(x^\alpha)$. 用 $\varphi(x)$ 表示在 0 等于 1 的 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 的一个函数，并令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(\varepsilon x)$.

那么若 $|\alpha|\leqslant m$，则存在一个不高于 $|\alpha|$ 阶的“浮动”多项式

$P_{\alpha,\varepsilon}(x)$，使差 $T(x^\alpha\varphi_\varepsilon) - P_{\alpha,\varepsilon}(x) = S_{\alpha,\varepsilon}$ 在分布意义下收敛于一个分布 $S_\alpha \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，把它记为 $T(x^\alpha)$.

为确信上述事实，只需证明若 $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，并且对 $|\alpha| \leqslant m$ 有 $\int x^\alpha\psi(x) = 0$，则 $\langle T(x^\alpha\varphi_\varepsilon), \psi\rangle$ 趋向于一个极限. 把这个积分写成形式 $\langle x^\alpha\varphi_\varepsilon, {}^tT(\psi)\rangle$，注意到在无穷远 $T(\psi) = O(|x|^{-n-\gamma})$，再用 Lebesgue 控制收敛定理即得结论.

定理1 假定 $T \in \mathscr{L}_\gamma$，$0 < s < \gamma$，并用 σ 表示 s 的整数部分. 则当且仅当 T 在 David 和 Journé 定理意义下在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上弱连续并且对 $|\alpha| \leqslant \sigma$，$T(x^\alpha) = 0$ 时(模阶数 $\leqslant \sigma$ 的多项式)，T 可扩张为齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s$ 上的一个连续线性算子.

这些条件蕴涵：当 $0 < s < \gamma$ 时，T 可扩张为在所有齐次 Besov 空间 $\dot{B}_p^{s,q}(1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty)$ 上的连续线性算子.

在证明这个结果之前，先考察几个例子.

3. 例　子

用齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s$ 代替通常空间 $C^s = \dot{C}^s \cap L^\infty$ 似乎令人不快.

这样作的理由在于 Hilbert 变换(在一维)或 Riesz 变换(在 n 维)在 C^s 上不是有界的，而在 $\dot{C}^s$ 上却是有界的.

事实上，当 $0 < s < 1$ 时，f 在 C^s 中的范数是

$$\| f \|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^s},$$

由此得若 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{N\to\infty} \| f(N^{-1}x) \|_{C^s} = \| f \|_\infty.$$

于是一个同展缩可交换的算子在 C^s 上的连续性蕴含在 L^∞ 上的连

续性. 然而无论是 Hilbert 变换，抑或是 Riesz 变换，在 L^∞ 上都不连续.

问题来自这些算子的核 $K(x,y)$ 当 $|y-x|$ 趋向于无穷时的性状. 在行将考虑的第二组例子中所说的问题不复存在.

考虑象征 $\sigma(x,\xi)\in S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，我们记起它应满足

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)|\leqslant C(\alpha,\beta)(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}. \qquad (3.1)$$

可直接验证相应的核 K $(x,\ y)$当 $|x-y|\leqslant 1$ 时满足

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|\leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}, \qquad (3.2)$$

而当 $|x-y|\geqslant 1$ 时，对所 $N\geqslant 1,\alpha\in\mathbb{N}^n,\beta\in\mathbb{N}^n$时满足

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|\leqslant C(\alpha,\beta,N)|x-y|^{-N}. \qquad (3.3)$$

为应用定理 1，只需保证 T (x^α) $=0$（模阶 $\leqslant\sigma$ 的多项式）. 这一事实在下列条件下显然成立，即

$$\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|_{\xi=0}=P_\alpha(x),$$

这里 $P_\alpha(x)$ 是一个不高于 σ 阶的多项式. 为归结到这一特殊情形，只需分解 $\sigma(x,\xi)$ 为 $\sigma(x,\xi)\varphi_0(\xi)+\sigma(x,\xi)\varphi_1(\xi)$，这里在 0 点邻域内 $\varphi_1(\xi)=0$，而 $\varphi_0\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. 这导致表示 $\sigma(x,D)=T_0+T_1$，算子 T_0无穷正则，而对 T_1可用定理 1.

由于 (3.1)，可从齐次空间过渡到非齐次空间，并验证 $T\in\mathscr{O}pS^0_{1,1}$在所有非齐次 Besov 空间 $B_p^{s,q}$上是连续的，其中 $s>0,1\leqslant p\leqslant\infty,1\leqslant q\leqslant\infty$.

上面讨论的算子显然在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上不是有界的.

下面的例子属于 Calderon. 设 $a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是一个 Lipschitz 函数：$\|a'\|_\infty=M<\infty$. 考虑分布核 $K(x,y)=\text{v. p.}\,\dfrac{a(x)-a(y)}{(x-y)^2}$ 和由这个核定义的算子 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R})\to\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. 那么 T 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上连续(Calderon，1965) 但在 Sobolev 空间 $H^s(s>0)$ 上及其齐次变种 $\dot{B}^s$上不连续. T 在 $\dot{C}^s$上也不连续.

反之分布核

$$K_1(x,y)=\text{v. p.}\,\frac{a(x)-a(y)-(x-y)a'(y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\frac{a(x)-a(y)}{x-y}$$

引导出一个较好的算子，其意义是 T_1 在 Sobolev 空间 $H^s(0\leqslant s\leqslant 1)$ 上和齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s(0<s<1)$ 上有界.

T 和 T_1 之间的差别在于 $T_1(1)=0$.

下面的例子是类似的. 这次假定 $a(x)$ 取实值但仍是 Lipschitz 连续的. 考虑复平面上由 $z(x)=x+ia(x)$ 定义的曲线 Γ: Γ 是 $a(x)$ 的图象. 然后构成 Cauchy 核 v. p. $\frac{1}{z(x)-z(y)}$，并把它与 v. p. $\frac{z'(y)}{z'(x)-z'(y)}$ 进行比较. 用 T 和 T_1 表示相应的算子. 这里也是 T_1 在下述意义下比 T 好. 两者都在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界，但此外，$T_1(1)=0$(模常数) 并且算子 T_1 在 Sobolev 空间 $H^s(0\leqslant s\leqslant 1)$ 上和齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s(0<s<1)$ 上连续.

由一个开集的 Lipschitz 边界上的双层位势定义的算子提供另一类似的例子.

设 $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个连通有界开集，其边界局部地是一个 Lipschitz 连续函数的图象，把由双层位势定义的 $L^2(\partial D)\to L^2(\partial D)$ 的算子记成 K.

利用局部坐标，∂D 由一个图象 $t=a(x)$ 表示，这里 $x\in\mathbb{R}^n$，而 $a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续的. 那么算子 K 的分布核由

$$K(x,y)=\text{v. p.}\,\frac{1}{\omega_n}\frac{a(x)-a(y)-(x-y)-\nabla a(y)}{[|x-y|^2+(a(x)-a(y))^2]^{(n+1)/2}}$$

给定 (ω_n 是单位球面 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 的表面积).

众所周知，若 $a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 仅仅 Lipschitz 连续，算子 K 不是紧的，而 Fabes, Jodeit 和 Riviere ([104]) 业已证明当 $a(x)$ 是 C^1 类的一个函数时 K 的紧性.

算子 K 在 $H^s(\mathbb{R}^n)(0\leqslant s\leqslant 1)$ 上和齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s(0<s<1)$ 上是连续的. 反之若把表达式中的分子换成简单些的 $a(x)-a(y)$，这两个性质不复存在.

现在给出定理 1 的诠释或应用的最后一例. 用 A 表示由 $a(x)$ 作的逐点乘法算子，这里 a 属于非齐次 Hölder 空间 $C^s, s>0$，用 T 表示一个一阶古典伪微分算子，其象征 $\tau(x,\xi)$ 属于 Hörmander 类 $S^1_{1,0}$.

用 $\widetilde{A}$ 表示由 $\tilde{a}(x)$ 作的逐点乘法算子，这里 $\tilde{a}=T(a)$. 因而函数 $\tilde{a}$ 属于 C^{s-1}.

人们注意到（并证明了）下列奇异现象：交换子 $[T,A]$ 当 $0<r<s-1$ 时连续地把 C^r 变到 C^r，而当 $r>s-1$ 时，同一交换子把 C^r 变到 C^{s-1} 而不能更好.

反之 $[T,A]-\widetilde{A}=R$ 当 $0<r\leqslant s$ 时连续地把 C^r 变到 C^r，而当 $r>s$ 时，R 把 C^r 变到 C^s.

但在这种情形，R 不是紧的或正则化的. 从交换子 $[T,A]$ 减去的校正子 $\widetilde{A}$ 不是伪微分法中要求的校正子.

今举例予以说明. 取 $\tau(x,\xi)=\sqrt{1+|\xi|^2}$ 或 $T=(I-\Delta)^{1/2}$，而 $a(x)=e^{i\alpha\cdot x}, \alpha\in\mathbb{R}^n$，那么 $[T,A]$ 由象征 $\{(1+|\xi+\alpha|^2)^{1/2}-(1+|\xi|^2)^{1/2}\}e^{i\alpha\cdot x}$ 定义，其经典处理基于渐近展开

$$\left\{\alpha\cdot\frac{\xi}{|\xi|}+\frac{1}{2|\xi|}\left(1+|\xi|^2-\left(\alpha\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\right)^2\right)+\cdots\right\}e^{i\alpha\cdot x}.$$

这表明通常伪微分法要求的校正子由象征 $\alpha\cdot\frac{\xi}{|\xi|}e^{i\alpha\cdot x}$ 定义，相应算子不是 $\widetilde{A}$ 而是 $A\sum_1^n\alpha_jR_j$，这里 R_j 是 Riesz 变换（其象征是 $\xi_j/|\xi|$），而 A 仍是由 $a(x)$ 作的逐点乘法算子.

刚介绍的例子还可解释如下，即注意到若 L 是一个借助属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 的象征定义的一个算子，并且 L 的核满足 (2.1) 和 (2.2)，那么 L 在齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s(0<s<1)$ 上的连续性由 $L(1)=0$（模常数函数）保证，即 $\lambda(x,0)=c$，c 是一个不依赖于 x 的常数.

对于一个尚不满足这个条件的算子要作的校正是从它减去由 $\lambda(x,0)$ 作的逐点乘法算子. 而通常伪微分法要求在无穷远而非原

点展开象征.

4. T 在齐次 Hölder 空间上的连续性

首先验证若 $T\in\mathscr{L}_\gamma$且对 $|\alpha|\leqslant\sigma, T(x^\alpha)=0$,那么 T 在齐次 Höder 空间 $\dot{C}^s$上连续,σ 是 $s<\gamma$ 的整数部分.

设 $f\in\dot{C}^s$,为验证 $T(f)$ 属于同一空间,只需证明 $|\langle T(f),\psi_\lambda\rangle|\leqslant C2^{-j(n/2+s)}$,这里 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 组成一个充分正则的小波的标准正交基. 我们有 $\langle T(f),\psi_\lambda\rangle=\langle f,{}^tT(\psi_\lambda)\rangle$,而 $g_\lambda={}^tT(\psi_\lambda)$ 具有下列三个性质:

(a) g_λ是空间 $\dot{C}_0^s$的一个连续线性型,$\dot{C}_0^s$是类 $\dot{C}^s$的紧支函数的子空间.

(b) 在无穷远有 $g_\lambda(x)=O(|x|^{-n-\gamma})$.

(c) 当 $|\alpha|\leqslant\sigma$ 时,所有矩 $\int x^\alpha g_\lambda(x)dx$ 是零.

我们知道这时 g_λ定义齐次 Höder 空间 $\dot{C}^s$上的一个连续线性型(第 6 章定理 6).

我们刚看到 $\langle T(f),\psi_\lambda\rangle$ 有意义. 正好有估计 $|\langle T(f),\psi_\lambda\rangle|\leqslant C2^{-j(n/2+s)}$,这一事实来自对 T 所作的假设在仿射群作用下的不变性.

我们不再坚持计算下去,因为往下要写的细节已出现在一个小波基中 Calderon-Zygmund 算子矩阵元素的估计中(第 8 章第 3 节).

为证定理 1,还需建立条件:当 $|\alpha|\leqslant\sigma$ 时 $T(x^\alpha)=0$ 以及 T 的弱连续性对于 T 在 $\dot{C}^s$上连续的必要性.

形式地看来,不超过 σ 阶的多项式在商空间 $\dot{C}^s$内等价于 0,因而若 T 扩张为一个 $\dot{C}^s$上的连续算子,对 $|\alpha|\leqslant\sigma$ 必有 $T(x^\alpha)=0$(模不超过 σ 阶的多项式).

推理的简单性是由于假定了 T 已经扩张到 $\dot{C}^s$ 内. 如果不是

这样，即 T 仅仅定义在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上，取值在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 内，我们如下推理. 注意到 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\dot{C}^s$ 内稠密，这里 $\dot{C}^s$ 被赋予拓扑 $(\dot{C}^s, B_1^{-s,1})$ —— 即把 $\dot{C}^s$ 看作 Besov 空间 $B_1^{-s,1}$ 的对偶所定义的拓扑. 对 $|\alpha| \leqslant s$ 满足 $\int x^\alpha \psi(x)dx = 0$ 的函数 $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 构成 $B_1^{-s,1}$ 的一个稠密子集，从而容易证明当赋予 $\mathscr{D}$ 以 $\dot{C}^s$ 范数且定理 1 的条件满足时，$T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 连续，于是 T 可扩张到整个 $\dot{C}^s$. 这就归结到了 T 已在 $\dot{C}^s$ 上定义了的情形.

我们来证明 L^2 上的弱连续性同样是必要的. 事实上，设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的中心为 x_0 半径为 $R > 0$ 的任意一个球，又设 u 是 C^s 类的按 B 规范化的且支集含于 B 的函数. 我们知道这时 $f = T(u)$ 属于齐次空间 $\dot{C}^s$. 由于 f 先验地仅是模不超过 σ 阶的多项式定义的，这还不足以在 B 上一致地估计 f. 所以还要阐明“浮动多项式”即得到 f 的一个具体实现. 为此用 $x_1 \in \mathbb{R}^n$ 表示满足 $|x_1 - x_0| = 2R$ 的点，并明确计算 $|\alpha| \leqslant \sigma$ 时各个导数 $\partial^\alpha f(x_1)$. 然后利用齐次空间 $\dot{C}^s$ 的函数的实现公式（第 6 章 第 4 节）写出具体细节没有困难，留给读者.

5. 算子 $T \in \mathscr{L}_\gamma$ 在齐次 Sobolev 空间上的连续性

我们首先假设 $0 < s < \gamma \leqslant 1$ 并给出连续性的两个证明.

第一个证明利用 T 在齐次 Hölder 空间上的连续性的一个较弱形式. 这一形式由下列引理描述.

引理 1 设 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个属于 $\mathscr{L}_\gamma$，并满足定理 1 的假设的算子. 那么若 u 是 C^s 类的一个支集含于单位球的函数，对 $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$，令 $u_{(x,t)}(y) = u\left(\frac{y-x}{t}\right)$，则有

$$\|Tu_{(x,t)}\|_\infty \leqslant C\|u\|_{C^s}. \tag{5.1}$$

事实上，我们知道 $u_{(x,t)}$ 在齐次空间 $\dot{C}^s$ 中的范数等于 $t^{-s}\|u\|_{\dot{C}^s}$. 由于 T 在 $\dot{C}^s$ 上有界，我们可用 Ct^{-s} 控制 $Tu_{(x,t)}$ 在 $\dot{C}^s$ 中的范数. 再用 x_1 表示 $\mathbb{R}^n$ 内一个满足 $|x_1-x|=2t$ 的点，可依次地利用 T 的核的大小估计 $Tu_{(x,t)}(x_1)$，以及利用 $\dot{C}^s$ 范数的定义对满足 $|x_1-y|\leqslant 4t$ 的 y 估计 $Tu_{(x,t)}(y)$.

依靠这个引理可如下建立 T 在 $\dot{B}^s$ 上的连续性. 设 $\xi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是当 $|u|\leqslant 2$（u 是自变量）时等于 1 的辐射函数，并令 $1=\xi(u)+\eta(u)$.

若 f 属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，而 $g=T(f)$，则有

$$g(y)-g(x)=g_1(x,y)+g_2(x,y)+g_3(x,y)+g_4(x,y),$$

其中由于 T（1）$=0$，若 $y\neq x$ 则有

$$g_1(x,y)=\int\{K(y,u)-K(x,a)\}(f(u)-f(x))\eta\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right)du,$$

$$g_2(x,y)=-\int\{K(x,u)(f(u)-f(x))\xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right)du,$$

$$g_3(x,y)=\int\{K(y,u)(f(u)-f(y))\xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right)du,$$

以及

$$g_4(x,y)=(f(y)-f(x))\int K(y,u)\xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right)du.$$

对所有这些项只需粗糙地进行估计，而不必再求助于“核的抵消”，这种抵消在引理的论证中已充分地利用过了.

举例来说，取一个满足 $s<\alpha<\gamma$ 的指数 α，则有

$$\begin{aligned}|g_1(x,y)|\leqslant &C\int_{\{|u-x|\geqslant 2|y-x|\}}|x-y|^{\gamma}\\&\times|u-x|^{-n-\gamma}|f(u)-f(x)|du\\=&C|x-y|^{\gamma}\int_{\{|u-x|\geqslant 2|y-x|\}}|u-x|^{-(n/2)-\gamma+\alpha}\\&\times|u-x|^{-(n/2)-\alpha}|f(u)-f(x)|du.\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式则给出

$$|g_1(x,y)|^2 \leqslant C'|y-x|^{2\alpha}\int_{\{|u-x|\geqslant 2|y-x|\}} \times |u-x|^{-n-2\alpha}|f(u)-f(x)|^2 du.$$

在积分 $\iint |g_1(x,y)|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy$ 的计算中，先对 y 积分，再对 u 和 x 积分，即得

$$C''\iint |f(u)-f(x)|^2|u-x|^{-n-2s}dudx = C''N_s^2(f).$$

g_2的情形类似．此时若假定 ξ 的支集含于 $|u|\leqslant 10$，则有

$$|g_2(x,y)| \leqslant C\int_{|u-x|\leqslant 10|y-x|} |x-u|^{-n}|f(u)-f(x)|du.$$

选一个满足 $0<\sigma<\beta$ 的指数 β，写出 $|x-u|^{-n} = |x-u|^{-n/2+\beta}|x-u|^{-n/2-\beta}$．利用 Cauchy-Schwarz 不等式，再仿前以结束计算．

对 g_3有

$$|g_3(x,y)| \leqslant C\int_{|u-y|\leqslant |x-y|} |y-u|^{-n}|f(u)-f(y)|du,$$

只需在 g_2 $(x,\ y)$ 的处理当中交换 x 和 y 的地位便得相应估计．最后由引理得

$$|g_4(x,y)| \leqslant C|f(y)-f(x)|.$$

由

$$\left(\iint |g(y)-g(x)|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy\right)^{1/2}$$

的估计值

$$C\left(\iint |f(y)-f(x)|^2|x-y|^{-n-2s}dxdy\right)^{1/2}$$

即得 T 在 B^s上的连续性．

为处理情形 $1\leqslant s\leqslant\gamma$，我们将采用第二个证明，它对 $0<s<\gamma\leqslant 1$ 的情形也适用．用 $\psi_\lambda, \lambda\in\Lambda$，表示具有 $C^q(q>\gamma)$ 正则性的紧支小波的标准正交基．我们打算估计矩阵元素 $\tau(\lambda,\lambda')=$

$\langle T(\psi_\lambda),\psi_{\lambda'}\rangle$ 的模，令 $\lambda = 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon,\varepsilon \in E,\lambda' = 2^{-j'}k' + 2^{-j'-1}\varepsilon',\varepsilon' \in E, j \in \mathbb{Z}, j' \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}; k' \in \mathbb{Z}^n$；$E$ 是除去 $(0,\cdots,0)$ 的 $\{0,1\}^n$.

若 $j' \geqslant j$，$|\tau(\lambda,\lambda')|$ 的估计跟证明 $T(1)$ 定理时建立的估计一致，我们有

$$|\tau(\lambda,\lambda')| \leqslant C2^{-(j'-j)(n/2+\gamma)}\left(\frac{2^{-j}}{2^{-j} + |k2^{-j} - k'2^{-j'}|}\right)^{n+\gamma}. \tag{5.2}$$

若 $j' \leqslant j$，我们利用函数 $g_\lambda = T(\psi_\lambda)$ 的正则性和 g_λ的导数在无穷远的下降性. 若 $0 < s < \gamma$，则 $g_\lambda \in C^s$，若 $|\alpha| < \gamma$，则有 $|\partial^\alpha g_\lambda(x)| = O(|x|^{-n-|\alpha|})$，容易定量地明确这些正则性和下降性.

用 $C2^{-j}$表示 ψ_λ的支集的直径.，那么当 $|k2^{-j} - k'2^{-j'}| \geqslant 2C2^{-j'}$ 时，对

$$\tau(\lambda,\lambda') = \int \psi_{\lambda'}(x)g_\lambda(x)dx$$

进行分部积分即得

$$|\tau(\lambda,\lambda')| \leqslant C2^{-(j-j')n/2}\left(\frac{2^{-j'}}{2^{-j'} + |k2^{-j} - k'2^{-j'}|}\right)^{n+\gamma}. \tag{5.3}$$

若 $|k2^{-j} - k'2^{-j'}| \leqslant 2C^{-j}$，我们利用 $|g_\lambda(x)|$ 的放大值和在 $\psi_{\lambda'}$ 的紧支集上进行积分这一事实，即得

$$|\tau(\lambda,\lambda')| \leqslant C(1 + |j' - j|)2^{-(j-j')n/2}. \tag{5.4}$$

作了这些准备之后，再回到 T 在齐次 Sobolev 空间 $\dot{B}^s$上的连续性问题上来. 这等价于元素为

$$\tau_s(\lambda,\lambda') = \tau(\lambda,\lambda')2^{-s(j-j')},(\lambda,\lambda') \in \Lambda \times \Lambda$$

的矩阵 τ_s 在 $l^2(\Lambda)$ 上的连续性. 而这又是由于当且仅当 $\sum_{\lambda\in\Lambda} 4^{js}|\alpha(\lambda)|^2 < \infty$ 时，$\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 属于 $\dot{B}^s$.

若 $0 < \gamma' < \gamma - s$，且 $0 < \gamma' < s$，可直接验证 τ_s属于代数 $\mathscr{M}_{\gamma'}$，因而 τ_s在 $l^2(\Lambda)$ 上有界.

定理 1 已完全证明.

我们刚给出的 T 在 $\dot{B}^s=\dot{B}_2^{s,2}(0<s<\gamma)$ 上的连续性的证明可推广到所有齐次 Besov 空间 $\dot{B}_p^{s,q}$，其中 $0<s<\gamma, 1\leqslant p\leqslant\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$. 逐次重复第 8 章定理 4 的证明即可验证这一事实.

还可进一步建立 T 在齐次 Sobolev 空间 $\mathscr{L}^{p,s}$ 上的连续性，其中 $1<p<\infty, 0<s<\gamma$.

为作到这一点，构造一个由 $\Lambda_s(\psi_\lambda)=2^{js}\psi_\lambda$决定的同构 $\Lambda_s:\mathscr{L}^{p,s}\to L^p(\mathbb{R}^n)$，并且回想起第 6 章命题 1；$\Lambda_s$是 $(-\Delta)^{s/2}$ 的模拟.

由于当 $0<\gamma'<\gamma-s$ 时，矩阵 τ_s属于代数 $\mathscr{M}_{\gamma'}$，我们有 $T=\Lambda_s^{-1}\mathscr{C}\Lambda_s$，这里 $\mathscr{C}$ 是一个属于 $\mathscr{O}p\mathscr{M}_{\gamma'}$ 的 Calderon-Zygmund 算子；$\mathscr{C}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界，从而对于 $0<s<\gamma$，T 在 $\mathscr{L}^{p,s}$ 上有界.

在下节我们将看到，若要求 $K(x,y)$ 及其关于 x 的导数在无穷远有足够快的下降性，当 $0<s<\gamma$ 和 $1<p<\infty$ 时，我们的算子 T 在非齐次 Sobolev 空间上仍是有界的.

我们注意到 $\dot{B}^s$连续性的直接证明（属于 P. G. Lamarie [164]）提供了 $T(1)$ 定理的一个新证明. 事实上，若 T 在 L^2上弱连续，并且 $T(1)=0, T^*(1)=0$，则当 $0<s<\gamma$ 时，T 及其伴随算子 T^* 在 $\dot{B}^s$上连续. 由于当在分布意义下取对偶时，$\dot{B}^s$的对偶空间是 $\dot{B}^{-s}$，T 在 $\dot{B}^s$上的连续性等价于 T 在 $\dot{B}^{-s}$上的连续性. 由于 T 在 $\dot{B}^s$上和在 $\dot{B}^{-s}$ 上都是连续的，通过内插，T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续.

6. 在普通 Sobolev 空间上的连续性

我们先来说明定理 1 所描述的算子在普通 Sobolev 空间（它不是齐次的）上不是连续的.

这里是一个一维的反例. 取一个函数 $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，对 ψ 作下列假设：ψ 的 Fourier 变换 $\hat{\psi}$ 是实的和偶的，支集含于 $2/3\leqslant|\xi|\leqslant 4/3$，在 1 取值为 1.

作象征

$$\sigma(x,\xi) = \sum_1^\infty \exp(-i2^{-j}x)\hat{\psi}(2^j\xi),$$

并把相应的算子记作 $T = \sigma(x,D)$.

T 的核是 $K(x,y) = \sum \exp(-i2^{-j}x)2^{-j}\psi(2^{-j}(x-y))$，这个核显然满足 Calderon-Zygmund 估计，奇异性出现在无穷远点.

当 $|\xi| \geqslant 1$ 时象征 $\sigma(x,\xi)$ 是零. 于是若 $\sigma(x,D)$ 在 $H^s(\mathbb{R})(s > 0)$ 上连续，它将在 $L^2(\mathbb{R})$ 上连续，反之亦然. 但 ${}^tT(1) = \sum_1^\infty (\exp(-i2^{-j}x) - 1)$，并且这个函数不属于 BMO. 反之，$T(1) = 0$（模常数），并且对所有 $k \in \mathbb{N}$ 亦有 $T(x^k) = 0$（模阶 $\leqslant k$ 的多项式）.

这同一算子在非齐次 Hölder 空间 C^s 上不可能连续. 设 $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是在 $[-1,1]$ 上等于 1 的一个函数，若 f 属于 $L^\infty(\mathbb{R})$，由 $\hat{g}(\xi) = \theta(\xi)\hat{f}(\xi)$ 定义 g；那么对所有 $s > 0$，g 属于 C^s. 若 T 在 C^s 上连续，由于 $T(f) = T(g)$，T 将在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上连续. 而 T 在 L^∞ 上的连续性蕴含 L^2 连续性（第 8 章，命题 9）.

从这个例子看出似乎 T 的核当 $|y - x|$ 趋于无穷时的性状联系着 T 在非齐次空间上的连续性. 下列定理明确了这种关系.

定理 2 设 T 是一个属于 $\mathscr{L}_\gamma(\gamma > 0)$ 的算子. 还假定 T 的核当 $|x - y| \geqslant 1$ 时满足估计

对于 $|\alpha| \leqslant \gamma$ 和 $N \geqslant 1$，有 $|\partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C_N|x - y|^{-N}$，(6.1)

当 $|\alpha| = m$ 和 $|x' - x| \leqslant 1/2|x - y|$ 时，$|\partial_x^\alpha K(x',y) - \partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C_N|x' - x|^\gamma|x - y|^{-N}$. (6.2)

我们假定 $\gamma = m + r, 0 < r \leqslant 1$.

若 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上弱连续并且 $T(x^\alpha) = m_\alpha(x)$ 当 $|\alpha| \leqslant m$ 时属于非齐次 Hölder 空间 $C^\gamma(\mathbb{R}^n)$，则当 $0 < s < \gamma$ 时 T 可扩张为一个在非齐次空间 C^s 和 H^s 上的连续线性算子.

首先注意，当 $|\alpha| \leqslant m$ 时，考虑到 T 的核的下降性假设，象 $T(x^\alpha)$ 按普通意义存在.

定理的价值在于直接提供了所有伪微分算子 $T \in \mathcal{O}pS^0_{1,1}$ 在非齐次空间 C^r 和 $H^s(s>0)$ 上的连续性（T 的象征满足 $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \leqslant C(\alpha,\beta)(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$）. 我们注意到这些算子一般说来在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上不是连续的.

定理 2 由组合定理 1 和下列引理提供的 Poincaré 不等式得以证明.

对 $s>0$，令 $N_s(f) = (2\pi)^{-n/2}\left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{2s}\right)^{1/2}$，我们有

引理 2 存在一个常数 $C(s,n)$，$s \geqslant 0$，$n \geqslant 1$，使对所有 $R>0$ 和所有属于 Sobolev 空间 H^s 且紧支集含于 $|x| \leqslant R$ 的函数 f 有

$$\|f\|_2 \leqslant C(s,n) R^s N_s(f).$$

为了能够利用这个结果，我们首先作一个第 2 章曾用过的注解. 若 $\theta(x)$ 属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 并且 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\theta(x-k)| \geqslant 1$，则对所有 $s>0$，$\|f\|_{H^s}$ 和 $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|f\theta_k\|^2_{H^s}\right)^{1/2}$ 是 H^s 上的两个等价范数；其中 $\theta_k(x) = \theta(x-k)$.

依靠 Poincaré 不等式和局部化 H^s 范数计算的可能性，把 T 的核分解为 $K_1 + K_2$，这里 $K_1(x,y) = \eta(x-y)K(x,y)$，$\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，$\eta$ 在单位球上等于 1. 这个分解导致 T 的分解 $T = T_1 + T_2$，显然 T_2 在所有空间 H^s 上有界，所有问题都集中在 T_1 了. 函数 $T_1(x^\alpha) = m_\alpha(x) - T_2(x^\alpha)$ 显然属于 C^r，我们首先考虑当 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ 时 $T_1(x^\alpha) = 0$ 的情形.

设 $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是一个满足 $\sum \theta(x-k) = 1$ 的函数. 若 $f \in H^s$，令 $f = \sum \theta_k f$，则有 $T_1(f) = \sum T_1(\theta_k f)$. $T_1(\theta_k f)$ 的支集含于球 $|x-k| \leqslant R$，我们所作的两个注释给出

$$\|T_1(f)\|_{H^s} \leqslant C\Big(\sum \|T_1(\theta_k f)\|^2_{H^s}\Big)^{1/2} \leqslant C'\Big(\sum \|T_1(\theta_k f)\|^2_{B^s}\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant C''\Big(\sum \|\theta_k f\|^2_{B^s}\Big)^{1/2} \leqslant C'''\|f\|_{H^s}.$$

留下的事情是把一般情形归结为当 $|\alpha| \leqslant m$ 时 $T_1(x^\alpha) = 0$ 的情形. 为此用一个合乎 $T(1)$ 定理条件的已知在 C^s和 H^s上有界的算子校正 T_1.

取一个积分为 1 且当 $1\leqslant |\alpha| \leqslant m$ 时 $\int x^\alpha \omega(x)dx = 0$ 的函数 $\omega(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

把核为 $\sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{1}{\alpha!} m_\alpha(x) \partial_x^\alpha \omega(x-y)$ 的算子记为 L_1. 那么显然当 $|\alpha| \leqslant m$ 时有 $L_1(x^\alpha) = m_\alpha(x)$. 此外,因为由一个 C^γ函数作的逐点乘法算子保持这个空间,L^1在非齐次空间 C^s和 H^s上有界. 最后令 $\tilde{T}_1 = T_1 - L_1$,$\tilde{T}_1$满足定理 2 的条件并且当 $|\alpha| \leqslant m$ 时有 $\tilde{T}_1(x^\alpha) = 0$.

这个定理还可推广到非齐次 Sobolev 空间 $L^{p,s}$,这里 $1 < p < \infty, 0 < s < \gamma$.

特别地,象征属于 $S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的伪微分算子 T 对所有 $s > 0$ 和所有 $p \in]1,\infty[$,在 $L^{p,s}$上有界.

7. 评 注

还回到齐次 Sobolev 空间 $\dot{B}^s = \dot{B}_2^{s,2}$,这里假定 $0 < s < 1$. 设 $\gamma > s$,又设 T 是一个属于 $\mathscr{L}_\gamma$的算子. 我们可以研究在什么条件下 T 能够扩张为一个在 $\dot{B}^s$上连续的线性算子. 由定理 1,当 $T(1) = 0$(模常数) 时即是这种情形. 但这个条件不是必要的. 按照 Stegenga ([216]) 的思想,引进使伪积 $\pi(\beta, f)$ 满足 $\|\pi(\beta,f)\|_{\dot{B}^s} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^s}$的函数 β 的 Banach 空间 E_s(模常数函数). 若 $s = 0$,E_s和 BMO 重合. 可以证明 ([191])$T \in \mathscr{L}_\gamma$在 $\dot{B}^s$上连续的必要且充分条件是 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上弱连续并且 $T(1)$ 属于 E_s.

这里是这个结果的简要证明. 若 $T \in \mathscr{L}_\gamma$且 T 在 L^2上的弱连续,容易证明 $\beta = T(1)$ 属于 $\dot{B}_\infty^{0,\infty}$. 于是算子 $R_\beta(f) = \pi(\beta, f)$ 也属于 $\mathscr{L}_\gamma$(对所有 $\gamma > 0$) 并且也有弱连续性. 差 $S_\beta = T - R_\beta$满足 $S_\beta(1) = 0$ 并具有弱连续性. 因此 S_β在 $\dot{B}^s$上连续(定理 1). 于是 T 的连续性等价于 R_β的连续性,这正是必须证明的.

考虑 T 是由 $m(x)$ 作的逐点乘法算子的情形. 与 T 相应的核 $K(x, y)$ 是零,从而 T 属于 $\mathscr{L}_\gamma$. T 在 $\dot{B}^s$上的连续性等价于弱连续性和条件 $T(1) \in E_s$. 但弱连续性表明 $m(x)$ 属于 L^∞. 因此齐次 Sobolev 空间 $\dot{B}^s$的逐点乘子是函数 $m(x) \in L^\infty \cap E_s$,这正是 Stegenta ([216]) 的定理的表述. 注意到当 $s \geq n/2$ 时 E_s退缩为 $\{0\}$ 这一事实是适宜的. 这里我们只讨论 $0 < s < 1$ 的情形,$s \geq 1$ 的情形有待解决.

第 11 章 $T(b)$ 定理

1. 引 言

我们曾经指明 David 和 Journé 的引人注目的 $T(1)$ 定理由于没有提供 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的连续性而显得不尽人意. 该定理的准则不起作用的缘由如下：若 $z(x)=x+ia(x)$，而 $-M\leqslant a'(x)\leqslant M$，那么用其它方法可知 v. p. $\int_{-\infty}^{\infty}(z(x)-z(y))^{-1}dy$ 不是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ 的一个函数. 问题在于在复分析中对测度 $dz(y)$ 求积分是自然的，而对测度 dy 则否. 事实上有 v. p. $\int_{-\infty}^{\infty}(z(x)-z(y))^{-1}dz(y)=0$（以常数函数为模）.

这一简单的注释引导我们猜测下列结果. 设 $b(x)\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 是一个几乎处处满足 $\mathrm{Re}\,b(x)\geqslant 1$ 的函数，并且 $K(x,y)$ 是一个满足 $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n}$ 和 $|\partial/\partial x_j K(x,y)|\leqslant C_1|x-y|^{-n-1}(1\leqslant j\leqslant n)$ 的反对称核. 又假定 $\int K(x,y)b(y)dy$ 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 那么 v. p. $K(x,y)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上定义一个有界的算子.

这表明单独一个函数 b，在满足 $\mathrm{Re}\,b\geqslant 1$ 的条件下，即足以用来建立一个奇异积分算子的连续性.

为避免假定所研究的算子对一个任意函数 $b\in L^{\infty}$ 有定义而尚不知道是否这个算子是一个 Calderon-Zygmund 算子这种恶性循环，可以限制核 $K(x,y)$ 还具有定性性质 $(1+|x-y|)^{n+1}K(x,y)\in L^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

这一猜测在 1984 年由 David，Journé 和 S. Semmes 证明并构

成了 $T(b)$ 定理的第一个提法. Tchamitchian 发现了 $T(b)$ 定理的涉及到相应于测度 $b(x)dx$ 的小波的更富几何意味的第二种提法. 这里 $T(b)$ 定理成了这种小波基的存在性的一个推论,并且这个作法跟我们证明 $T(1)$ 定理曾用过的方法相平行.

2. 基本定理的陈述

设 $V_j, j \in \mathbb{Z}$,是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r-正则的多分辨率分析,这里 $r \geqslant 1$. 我们说 V_j是实的,如果相应于这个分析的函数 φ 和小波 $\psi^{\varepsilon}_{j,k}$是实值的.

我们将假定存在一个指数 $\gamma > 0$ 和一个常数 C 使

$$|\partial^{\alpha}\varphi(x)| \leqslant C \exp(-\gamma|x|), \text{当 } |\alpha| \leqslant r \text{ 时} \qquad (2.1)$$

尽管这个条件可以不要. 由 (2.1) 得,当 $|\alpha| \leqslant r$ 时,对某个指数 $\gamma' > 0$ 和一个常数 $C' > 0$ 有

$$|\partial^{\alpha}\psi^{\varepsilon}_{j,k}(x) \leqslant C' 2^{nj/2} 2^{j|\alpha|} \exp(-\gamma' |2^j x - k|). \qquad (2.2)$$

这些假设在众多例子中是满足的,虽然可以用通常的在无穷远处的速降假设代替 (2.1) 和 (2.2),但是那样下面的证明将白白地复杂化.

在下文中,固定一个满足 $\operatorname{Re} b(x) \geqslant 1$ 的函数 $b(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. 用 b 通过

$$B(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)b(x)dx \qquad (2.3)$$

定义双线性对称型 $B: L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. 又令 $\beta(f,g) = B(f,\bar{g})$.

双线性型 B 具有下列值得注意的性质

$$\operatorname{Re} B(f,f) \geqslant \|f\|_2^2, \qquad (2.4)$$

这种双线性型曾被 T. Kato 在 [151] 中系统地研究过.

这个性质取代了定义一个 Hilbert 结构时的共轭双线性型的(严格)正定性.

设 $\widetilde{W}_j \subset V_{j+1}$是由对所有 $g \in V_j$满足 $\beta(f,g)=0$ 的 f 组成的向量子空间. 若 $b(x)=1$,就回到了在第 2 章用过的 W_j.

定理 1 空间 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 是 $\widetilde{W}_j (j \in \mathbb{Z})$ 的直和. 即,一方面存在两个常数 $C_2 \geqslant C_1 > 0$ 使对所有序列 $f_j \in \widetilde{W}_j$,当 $\sum_{-\infty}^{\infty}\|f_j\|_2^2 < \infty$ 时有

$$C_1\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\|f_j\|_2^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big\|\sum_{-\infty}^{\infty}f_j\Big\|_2 \leqslant C_2\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\|f_j\|_2^2\Big)^{1/2}, \qquad (2.5)$$

另一方面,所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 允许一个(唯一的)分解 $f = \sum_{-\infty}^{\infty}f_j$,这里 $\sum_{-\infty}^{\infty}\|f_j\|_2^2 < \infty$ 并且 $f_j \in \widetilde{W}_j$.

若 $b(x)=1$,那么这个结果是十足平淡的,它无非是说 $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j$. 这个等式是小波构造的出发点. 同样,定理 1 将允许具有下列性质的 Riesz 基 $\widetilde{\psi}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 的构造:小波的局部性和正则性跟古典情形一样,而摆动性则由对 $\lambda \in \Lambda_j$有 $\widetilde{\psi}_\lambda \in \widetilde{W}_j$下定义.

一旦这个基构造成功,满足 $T(b)=0$ 和 ${}^tT(b)=0$ (自然还有弱连续性)的奇异积分算子的 L^2连续性就可如下获得:验证对某个 $\gamma > 0$,T 在基 $\widetilde{\psi}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 下的矩阵属于 $\mathscr{M}_\gamma$.

3. 算子和增生型(抽象情形)

本节里我们要汇集一些既简单又一般的结果,为读者方便起见,我们予以证明.

设 H 是一个复 Hilbert 空间,而 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ 是定义其 Hilbert 结构的共轭双线性型. 一个线性且连续的算子 $T: H \to H$ 是**增生的**,如果对所有 $x \in H$,有 $\mathrm{Re}\langle T(x),x\rangle \geqslant 0$. 同样的算子 T 是 δ-**增生的**($\delta > 0$),如果 $\mathrm{Re}\langle T(x),x\rangle \geqslant \delta\|x\|^2$. 这还可写成在自伴算子

的意义下 $T+T^*\geqslant 2\delta 1$（1 是恒等算子）.

一个 δ- 增生算子是 H 的一个同构. 事实上，

$$\delta\|x\|^2\leqslant \mathrm{Re}\langle T(x),x\rangle\leqslant|\langle T(x),x\rangle|\leqslant\|T(x)\|\|x\|.$$

因而 $\delta\|x\|\leqslant\|T(x)\|$，同样有 $\delta\|x\|\leqslant\|T^*(x)\|$. 从而 T 是一个同构.

设 $\beta:H\times H\to\mathbb{C}$ 是一个共轭双线性型. 这表示 $|\beta(x,y)|\leqslant C\|x\|\|y\|$，$\beta(x,y_0)$ 是 H 上的一个连续线性型（对固定的 y_0），并且 $\overline{\beta(x_0,y)}$ 也均等地是 H 上的一个连续线性型.

我们说 β 是 δ- 增生的，如果对所有 $x\in H$ 有 $\mathrm{R_e}\beta(x,x)\geqslant\delta\|x\|^2$. 此时存在一个 δ- 增生算子 $T:H\to H$ 使对所有 $x\in H,y\in H$ 有 $\beta(x,y)=\langle T(x),y\rangle$.

我们已经建立了下列引理.

引理 1 对于所有连续线性型：$l:H\to\mathbb{C}$，存在唯一的 $a\in H$ 使 $l(x)=\beta(x,a)$.

事实上，Riesz 表示定理给出 $l(x)=\langle x,b\rangle=\langle T(x),a\rangle$，如果 $T^*(a)=b$ 的话；而由于 T^* 是一个同构，这个方程可解.

定理 1 由下列结果证明.

命题 1 设 H 是一个 Hilbert 空间，$\beta:H\times H\to\mathbb{C}$ 是一个 δ-增生 $(\delta>0)$ 的共轭双线性型，V 是 H 的一个闭向量子空间. 定义

$$\widetilde{W}=\{x\in H;\text{对所有的 } y\in V \text{ 有 } \beta(x,y)=0\},\qquad(3.1)$$

则 H 是 V 和 $\widetilde{W}$ 的直和.

此外，从 H 到 V 上的（平行于 $\widetilde{W}$ 的）斜投影算子的范数仅依赖于 δ 和涉及到 β 的连续性的常数.

我们要验证所有 $c\in H$ 都能以唯一的方式写成 $c=a+b$，这

里 $a \in V, b \in \widetilde{W}$. 从而对所有 $v \in V$ 应有 $\beta(c,v) = \beta(a,v)$. 为找到 $a \in V$,考虑在 V 上定义的线性型 $\overline{\beta(c,v)} = l(v)$,对 l 用引理1;也就是说,H 用 V 代替,β 限制在 $V \times V$ 上. 如此定义的共轭双线性型仍是 δ- 增生的,而引理1就允许找到一个(且仅仅一个)$a \in V$ 使 $l(v) = \overline{\beta(a,v)}$. 命题1证毕.

回到定理1,将有 $V_{j+1} = V_j + \widetilde{W}_j$,并且平行于 $\widetilde{W}_j$的斜投影算子 $\widetilde{P}_j: V_{j+1} \to V_j$一致有界.

第二组注释涉及到增生算子的象征演算. 按照 T. Kato([151])的叙述,我们有下列结果.

命题 2 设 $T: H \to H$ 是一个 δ- 增生算子,则存在唯一的一个增生算子 S,使 $S^2 = T$. 把这个算子记为 $T^{1/2}$. 对某个仅依赖于 δ 和 $\|T\|$ 的 $\delta' > 0$,它是 δ'- 增生的. 最后 $T^{1/2}$的逆,记为 $T^{-1/2}$,由下式给定

$$T^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\lambda + T)^{-1}\lambda^{-1/2} d\lambda. \tag{3.2}$$

事实上,设 $A \subset \mathscr{L}(H,H)$ 是 T 的多项式代数(对于算子范数)的闭包. 那么 T 的谱 $\sigma(T)$ 包含在由 $\operatorname{Re} z \geqslant \delta$, $|z| \leqslant \|T\|$ 定义的复平面的紧子集内. 函数 $z^{1/2}$在这个谱的邻域内是全纯的. 由此得到(3.2)的右端提供一个平方为 T^{-1}的算子.

我们证明(3.2)的右端对某个 $\delta' > 0$ 是 δ'- 增生的. 为此,要利用下列引理,我们把其十分简单的证明留给读者.

引理 2 设 $T: H \to H$ 是一个 δ- 增生算子,则 T^{-1}是 $\delta\|T\|^{-2}$- 增生的.

回到(3.2)的右端即得

$$\operatorname{Re}\langle T^{-1/2}x, x\rangle \geqslant \frac{\|x\|^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda + \delta}{(\lambda + \|T\|)^2}\lambda^{-1/2} d\lambda = c\|x\|^2.$$

从而 $T^{-1/2}$是 c-增生的，利用上述引理，$T^{1/2}$是 δ'-增生的.

计算 $T^{-1/2}$的另一种方式用到下列考虑.

引理 3　设 T 是 δ- 增生的并且 $\lambda > \|T\|^2/2\delta$，则

$$\|T - \lambda\| < \lambda. \tag{3.3}$$

事实上，我们有

$$\|T - \lambda\| = \|(T^* - \lambda)(T - \lambda)\|^{1/2},$$

而

$$(T^* - \lambda)(T - \lambda) = T^*T - \lambda(T^* + T) + \lambda^2$$
$$\leqslant \|T\|^2 - 2\lambda\delta + \lambda^2 < \lambda^2;$$

这些不等式是在自伴算子间的次序关系的意义下写出的. 终得 $\|T - \lambda\| < \lambda$.

返回到 $T^{-1/2}$ 的计算. 写出等式 $T = \lambda - (\lambda - T) = \lambda\left(1 - \frac{\lambda - T}{\lambda}\right)$，并假定 $\lambda > \|T\|^2/2\delta$. 令 $R = \lambda^{-1}(\lambda - T)$，则有 $\|R\| < 1$. 于是

$$T^{-1/2} = \lambda^{-1/2}(1 - R)^{1/2} = \sum_0^\infty c_k R^k，其中\ c_k = O(k^{-1/2}).$$

在 T. Kato 的著名著作 [151] 中建立了 S 的唯一性，请读者参阅.

4. 适应于一个双线性型的基的构造

设 H 是一个 Hilbert 空间，H 的一个 Riesz 基 $e_j, j \in J$，是 H 的一个完全部分，可以对它找到两个常数 $C_2 \geqslant C_1 > 0$，使得对于任意选择的系数有

$$C_1\left(\sum_{j\in J}|\alpha_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\sum_{j\in J}\alpha_j e_j\|^2 \leqslant C_2\left(\sum_{j\in J}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

我们说一个矩阵 $M = (m(j,k))_{(j,k)\in J\times J}$是 δ- 增生的，如果对

于所有复数序列 $\xi_j \in l^2(J)$ 有

$$\mathrm{Re}\sum_j\sum_k m(j,k)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant \delta\sum_j|\xi_j|^2. \tag{4.2}$$

设 H 是复数域上的一个 Hilbert 空间，考虑元素是 $B(e_j, e_k)(j \in J, k \in J)$ 的矩阵 B. 这个矩阵在 $l^2(J)$ 上是有界的. 事实上，若 $\xi_j \in l^2(J)$ 且 $\eta_j \in l^2(J)$，则对 $x = \sum\xi_j e_j, y = \sum\eta_k e_k$ 有

$$\sum\sum\xi_j\eta_k B(e_j,e_k) = B(x,y),$$

因而

$$|\sum\sum\xi_j\eta_k B(e_j,e_k)| \leqslant C\|x\|\|y\|$$
$$\leqslant C'\left(\sum|\xi_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum|\eta_k|^2\right)^{1/2}.$$

我们将系统利用下列结果.

命题3 设 H 是复数域上的一个 Hilbert 空间，而 $B: H \times H \to \mathbb{C}$ 是一个对称且双连续的双线性型，又设 $e_j, j \in J$，是 H 的一个 Riesz 基，相应矩阵 $(B(e_j,e_k))_{(j,k)\in J\times J}$是 δ- 增生的($\delta > 0$). 则存在一个 Riesz 基 $f_j, j \in J$，使 $B(f_j,f_k)$ 随 $j \neq k$ 或 $j = k$ 而等于 0 或 1.

又设 $J = \mathbb{Z}^n$，并且对某个指数 $\alpha > 0$ 和一个常数 C 有

$$|B(e_j,e_k)| \leqslant C\exp(-\alpha|j-k|), \tag{4.3}$$

则存在一个指数 $\beta>0$ 和一个常数 C'使

$$f_j = \sum\gamma(j,k)e_k, \tag{4.4}$$

并且

$$|\gamma(j,k)| \leqslant C'\exp(-\beta|j-k|). \tag{4.5}$$

事实上，用 B 表示矩阵 $(B(e_j,e_k))_{(j,k)\in J\times J}$，并把增生矩阵 $B^{-1/2}$的元素记作 $\gamma(j,k)$. 由于 $B^{-1/2}$是 $l^2(J)$ 的一个同构，向量 f_j 组成 H 的一个 Riesz 基. 今证明 $B(f_j,f_k) = \delta_{(j,k)}$.

首先注意 B 的对称性推出 ${}^tB = B$，并且由于 (3.2)，${}^tB^{-1/2} =$

$B^{-1/2}$. 从而有 $\gamma(j,k)=\gamma(k,j)$. 又有

$$B(f_j,f_k)=\sum_l\sum_m\gamma(j,l)\gamma(k,m)B(e_l,e_m)$$
$$=\sum_l\sum_m\gamma(j,l)B(e_l,e_m)\gamma(m,k).$$

我们辨认出这是 $B^{-1/2}BB^{1/2}=\mathbf{1}$ 的元素，从而命题 3 的第一个断言得证.

为证明第二个断言，取定 $\lambda>\|B\|^2/2\delta$，由引理 2，我们有 $B=\lambda(\mathbf{1}-R)$，这里 $\|R\|<1$. 这引导到 $B^{-1/2}=\sum_0^\infty c_kR^k$，其中 $c_k=O(k^{-1/2})$. R 的矩阵元素记为 $r(j,k)$，它们满足(4.3). R^k的矩阵元素 $r_k(j,j')$ 由下列等式计算

$$r_k(j,j')=\sum_{j_1}\cdots\sum_{j_{k-1}}r(j,j_1)r(j_1,j_2)\cdots r(j_{k-1},j'). \qquad (4.6)$$

为了上估 $|r_k(j,j')|$，(任意地) 分解 α 成 $\beta+\gamma$，其中 $0<\beta<\alpha$. 在 $\mathbb{Z}^d$ 上利用三角不等式，以便用 $\exp(-\beta|j-j'|)$ 代替 $\exp(-\beta|j-j_1|-\cdots-\beta|j_{k-1}-j'|)$. 再来处理

$$\exp(-\beta|j-j_1|)\cdots\exp(-\gamma|j_{k-1}-j'|).$$

把最后一个因子放大为 1，再依次关于 j_1, …, j_{k-1}求和，利用显然的不等式

$$\sum\exp(-\gamma|k|)\leqslant C(\gamma),$$

便得

$$|r_k(j,j')\leqslant C^k(C(\gamma))^k\exp(-\beta|j-j'|).$$

此外，若用 r 表示 R 的算子范数，则有

$$0\leqslant r<1 \text{ 和 } |r_k(j,j')|\leqslant r^k.$$

由对数凸性，从这两个估计得到，对 $k\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}^n,j'\in\mathbb{Z}^n$有

$$|r_k(j,j')|\leqslant\omega^k\exp(-\alpha'|j-j'|), \qquad (4.7)$$

其中 $0\leqslant\omega<1,\alpha'>0$ 仅依赖于 $r,C,C(\gamma)$ 和 β.

至此，可把这些估计式相加，就得到命题中所陈述的 $B^{-1/2}$ 的

矩阵元素的上估式.

可以证明,若把当 $|j-k|$ 趋于无穷时 $|B(e_j,e_k)|$ 的指数下降代之以速降,那么矩元素 $\gamma(j,k)$ 自己当 $|j-k|$ 趋于无穷时也是速降的.

5. Tchamitchian 的构造

回到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的多分辨率分析 V_j. 我们回顾一下这一分解,假定 φ 和 $\psi_{j,k}^{\varepsilon}$是实的和 r- 正则的,$r\geqslant 1$. 此外,还假定这些函数及其低于或等于 r 阶的所有导数是指数下降的.

再令 $\varphi_{j,k}(x)=2^{nj/2}\varphi(2^jx-k),j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n$,用 B_j表示矩阵 $(B(\varphi_{j,k},\varphi_{j,l})_{(k,l)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n}$. 一个初步的注释是这些矩阵 B_j在 $l^2(\mathbb{Z}^n)$ 上是一致有界并且一致 δ- 增生的 ($\delta=1$).

事实上,若 ξ_k和 η_l是两个平方可和序列,则有

$\sum\limits_k\sum\limits_l B(\varphi_{j,k},\varphi_{j,l})\xi_k\eta_l = B(f,g)$, 其中 $f=\sum\xi_k\varphi_{j,k}, g=\sum\eta_l\varphi_{j,l}$.

由于

$$|B(f,g)|\leqslant C\|f\|_2\|g\|_2, \text{这里 } C=\|b\|_\infty,$$

故有

$$\left|\sum_k\sum_l B(\varphi_{j,k},\varphi_{j,l})\right|\leqslant C\left(\sum|\xi_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum|\eta_k|^2\right)^{1/2}.$$

令 $f=\sum\xi_k\varphi_{j,k}$,由于 $\varphi_{j,k}$是实值的,我们有 $\bar{f}=\sum\bar{\xi}_k\varphi_{j,k}$,进而有

$$\mathrm{Re}\sum_k\sum_l B(\varphi_{j,k}\varphi_{j,l})\xi_k\bar{\xi}_l=\mathrm{Re}B(f,\bar{f})\geqslant\|f\|_2^2.$$

利用命题 3 即得一个新的序列 $\tilde{\varphi}_{j,k},k\in\mathbb{Z}^n$,它构成 V_j的一个 Riesz 基,我们有

$$C\left(\sum|\xi_k|^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\sum\xi_k\tilde{\varphi}_{jmk}\right\|_2\leqslant C'\left(\sum|\xi_k|^2\right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

其中 C 和 C' 不依赖于 j.

$$B(\tilde{\varphi}_{j,k},\tilde{\varphi}_{j,l}) = \delta_{(k,l)}, \tag{5.2}$$

以及

$$|\partial^\alpha \tilde{\varphi}_{j,k}(x)| \leqslant C' 2^{nj/2} 2^{j|\alpha|} \exp(-\gamma' |2^j x - k|), |\alpha| \leqslant r \tag{5.3}$$

$(\gamma' > 0, C' > 0$ 仅依赖于 n, C 和 $\gamma)$.

用 W_j表示 V_j在 V_{j+1}中的正交补，而 $\widetilde{W}_j$由对所有 $u \in V_j$，$B(f,u) = 0$ 来定义，我们立刻注意到若 u 属于 V_j，那么其共轭函数 $\bar{u}$ 也如是. 利用命题 1 得 $V_{j+1} = V_j + \widetilde{W}_j$.

设 $\widetilde{P}_j: V_{j+1} \to V_j$是核为 $\widetilde{W}_j$的斜投影算子. 我们有

$$\widetilde{P}_j(f) = \sum_k B(f,\tilde{\varphi}_{j,k})\tilde{\varphi}_{j,k}.$$

设 $T_j: W_j \to \widetilde{W}_j$是从 $\widetilde{W}_j$ 到 W_j上的正交投影的逆算子. 我们有 $T_j = \mathbf{1} - P_j$，而 T_j是从 W_j到 $\widetilde{W}_j$上的一个同构. 此外，存在一个不依赖于 j 的常数 C，使对所有 $f \in W_j$有

$$\|f\|_2 \leqslant \|T_j(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2. \tag{5.4}$$

暂时承认下列结果.

命题 4 在每个 W_j上与 T_j重合的算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是连续的.

下节我们将看到这一结果是 $T(1)$ 定理的相当容易的一个推论.

考虑"普通小波"$\psi^\varepsilon_{(j,k)}, \varepsilon \in E$，它是由第 3 章的算法得到的. 再令 $h^\varepsilon_{j,k} = T_j(\psi^\varepsilon_{(j,k)})$，我们有

引理 4 对每个 $j \in \mathbb{Z}$，矩阵 $B(h^\varepsilon_{j,k}, h^{\varepsilon'}_{j,k'})$ 是 δ- 增生的.

按照 P. G. Lemarié 的作法，为得这一引理，写出等式 $B(h^\varepsilon_{j,k}, h^{\varepsilon'}_{j,k'}) = B(h^\varepsilon_{j,k}, \psi^{\varepsilon'}_{j,k'})$. 这是由于 $h^{\varepsilon'}_{j,k'} - \psi^{\varepsilon'}_{j,k'} \in V_j$，并且对 $f \in \widetilde{W}_j$和 $u \in V_j$，$B(f,u) = 0$. 普通小波 $\psi^\varepsilon_{j,k}$是实值的，于是有 $\bar{h}^{\varepsilon'}_{j,k'} - \psi^{\varepsilon'}_{j,k'} \in V_j$(由于 $\overline{V}_j = V_j$). 终于有 $B(h^\varepsilon_{j,k}, h^{\varepsilon'}_{j,k'}) = B(h^\varepsilon_{j,k}, \bar{h}^{\varepsilon'}_{j,k'})$，由于 $h^\varepsilon_{j,k}$形

成 $\widetilde{W}_j$的一个 Riesz 基,后一矩阵是 δ- 增生的.

重新利用命题3,以得到 $\widetilde{W}_j$的一个新的 Riesz 基$\tilde{\psi}_\lambda,\lambda\in\Lambda_j$,使得当 $\lambda\in\Lambda_j,\lambda'\in\Lambda_j$并且 $\lambda\neq\lambda'$ 时,$B(\tilde{\psi}_\lambda,\tilde{\psi}_{\lambda'})=0$,当 $\lambda=\lambda'$ 时 $B(\tilde{\psi}_\lambda,\tilde{\psi}_{\lambda'})=1$.

但由 $\tilde{\psi}_\lambda$的构造方式,当 $\lambda\in\Lambda_j,\lambda'\in\Lambda_{j'}$且 $j\neq j'$ 时同样有 $B(\tilde{\psi}_\lambda,\tilde{\psi}_{\lambda'})=0$. 事实上,由对称性,可归结为 $j>j'$ 的情形;这时 $\tilde{\psi}_\lambda\in\widetilde{W}_j$,而 $\tilde{\psi}_{\lambda'}\in V_j$. 由 $\widetilde{W}_j$的定义即得结论.

我们得到一族函数 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$,具有下列性质:

$$\Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x)\Big\|_2\leqslant C\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\Big)^{1/2},\tag{5.5}$$

$$B(\tilde{\psi}_\lambda,\tilde{\psi}_{\lambda'})=\delta_{(\lambda,\lambda')},\tag{5.6}$$

以及当 $|\alpha|\leqslant r$ 时,对某个 $\gamma>0$ 有

$$|\partial^\alpha\tilde{\psi}_\lambda(x)|\leqslant C2^{-nj/2}2^{j|\alpha|}\exp(-\gamma|2^jx-k|),\tag{5.7}$$

注意这个 γ 跟开头给的那个不同.

不等式 (5.5) 来源于算子 T 的连续性. 事实上,

$$f=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x)=\sum_j\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\alpha(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x)$$

$$=\sum f_j\quad 这里\ f_j\in\widetilde{W}_j,$$

从而 $f_j=T_j(g_j)$,这里 $g_j\in W_j$,于是有 $f=T(g)$,这里 $g=\sum_{-\infty}^{\infty}g_j$. 由(5.4)得

$$\|f\|_2\leqslant C\|g\|_2=C\Big(\sum\|g_j\|_2^2\Big)^{1/2}\leqslant C'\Big(\sum\|f_j\|_2^2\Big)^{1/2}.$$

再注意到 $\tilde{\psi}_\lambda(\lambda\in\Lambda_j)$ 构成 $\widetilde{W}_j$的一个 Riesz 基以及相应常数关于 j 一致有界即得 (5.5).

经过对偶不等式 (5.5) 和等式 (5.6) 蕴涵 (5.5) 的反向不等式. 事实上,考虑一个任意的有限线性型 $g(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\beta(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda$,其中的 $\beta(\lambda)$ 满足 $\sum|\beta(\lambda)|^2\leqslant1$. 于是有 $\|g\|_2\leqslant C$,并且对于所有

的和 $f(x)=\sum\alpha(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda(x)$，有 $B(f,g)=\sum\alpha(\lambda)\beta(\lambda)$. 但 $|B(f,g)|\leqslant\|f\|_2\|g\|_2\|b\|_\infty\leqslant C'\|f\|_2$，这可写成

$$\left|\sum\alpha(\lambda)\beta(\lambda)\right|\leqslant C'\|f\|_2,\text{只要}\sum|\beta(\lambda)|^2\leqslant 1. \quad (5.8)$$

在 (5.8) 左端取上确界，便得 $\left(\sum|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}\leqslant C'\|f\|_2$，这正是所说的反向不等式.

函数 $\tilde{\psi}_\lambda$ 是适应于 $b(x)$ 的小波. 对于每个固定的 j，当 λ 限制在 Λ_j 内时，$\tilde{\psi}_\lambda$ 形成 $\widetilde{W}_j$ 的一个 Riesz 基. 为了证明所有 $\tilde{\psi}_\lambda$ 的集合是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 Riesz 基，我们还应当建立 $\widetilde{W}_j$ 的(代数) 和在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的.

由于 V_m 的并集在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的，我们只需知道如何用属于这个代数和的一个序列逼近 $f\in V_m$.

我们有 $V_m=V_{m-1}+\widetilde{W}_{m-1}$，因而 $f=f_1+g_1$，其中 $f_1\in V_{m-1}$. 重复这种分解可以得到 $f=f_N+r_N$，其中 $f_N\in V_{m-N}$，而 r_N 属于 $j\geqslant m-N$ 时 $\widetilde{W}_j$ 的代数和.

我们证明当 N 趋于无穷时 $\|f_N\|_2$ 趋向于 0. 我们一开始就注意到包含关系 $V_j\subset V_{j+1}$ 蕴涵当 $u\in\widetilde{W}_j$，$v\in V_j$，并且 $j'\leqslant j$ 时 $B(u,v)=0$. 特别地有当 $v\in V_{m-N}$ 时 $B(r_N,v)=0$，从而有

$$f_N=\sum_k B(f_N,\tilde{\varphi}_{m-N,k})\tilde{\varphi}_{m-N,k}=\sum B(f,\tilde{\varphi}_{m-N,k})\tilde{\varphi}_{m-N,k}.$$

由于 (5.3)，后一算子的核满足

$$|K_N(x,y)|\leqslant C2^{(m-N)n}(1+2^{m-N}|x-y|)^{-n-1}.$$

由此立刻得到当 N 趋于无穷时 $\|f_N\|_2$ 趋于 0. 从而 $\widetilde{W}_j$ 的代数直和在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的.

终得小波 $\tilde{\psi}_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$，形成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 Riesz 基.

我们已建立了下列定理.

定理 2 设 V_j，$-\infty<j<\infty$，是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个实的多分辨率分析，它具有性质 (2.1) 和 (2.2). 则存在一个常数 C，一个指数 $\eta>0$ 和一族函数 $\tilde{\psi}_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$，具有下列性质：

对于 $\lambda \in \Lambda_j$，$\tilde{\varphi}_\lambda$属于 V_{j+1}，　　(5.9)

对于 $|\alpha| \leqslant r$，$|\partial^\alpha \tilde{\varphi}_\lambda(x)| \leqslant C 2^{j(|\alpha|+n/2)} \exp(-\eta |2^j x - k|)$，

(5.10)

$\int \tilde{\varphi}_\lambda(x) \tilde{\varphi}_{\lambda'}(x) b(x) dx = 0$，若 $\lambda \neq \lambda'$；1，若 $\lambda = \lambda'$，　　(5.11)

$\tilde{\varphi}_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 的集合是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 Riesz 基.　　(5.12)

推论 1　所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 以唯一方式写成 $f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) \tilde{\varphi}_\lambda(x)$，其中 $\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 < \infty$；$\alpha(\lambda) = \int f(x) \tilde{\varphi}_\lambda(x) b(x) dx$，并且对两个常数 $C_2 \geqslant C_1 > 0$ 有

$$C_1 \|f\|_2 \leqslant \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant C_2 \|f\|_2. \qquad (5.13)$$

推论 2　$\int \tilde{\varphi}_\lambda(x) b(x) dx = 0.$

事实上，设 $g(x) \in V_0$是在 0 点等于 1 的一个函数. 作 $g_m(x) = g(2^{-m}x) \in V_{-m}$，并对充分大的 m，写出正交性条件 $\int \tilde{\varphi}_\lambda(x) b(x) g_m(x) dx$. 然后只需令 m 趋于无穷并利用 Lebesgue 控制收敛定理.

剩下的是要证明 T 的连续性，这正是打开上述建筑拱门的钥匙.

6. 算子 T 的连续性

为证算子 T 的连续性，我们对它应用 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理. 跟前面一样，用 $\psi^\varepsilon_{j,k}$表示通常的小波的标准正交基 ($\varepsilon \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$). 设 D_j是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 W_j上的正交投影算子：

$$D_j(f) = \sum_k \sum_{\varepsilon \in E} (\psi^\varepsilon_{j,k}) \psi^\varepsilon_{j,k},$$

那么

$$T=\sum_{-\infty}^{\infty}T_jD_j=\sum_{-\infty}^{\infty}(1-\widetilde{P}_j)D_j=1-R,R=\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{P}_jD_j.$$

$\widetilde{P}_j D_j$的核 R_j (x, y) 是

$$\sum_{\varepsilon\in E}\sum_k\sum_l B(\psi^\varepsilon_{j,k},\widetilde{\psi}_{j,l})\widetilde{\psi}_{j,l}(x)\psi^\varepsilon_{j,k}(y);$$

复合 $\widetilde{P}_j$和 D_j的核即可得之. 其中的系数 $B(\psi^\varepsilon_{j,k},\widetilde{\psi}_{j,l})$ 满足

$$|B(\psi^\varepsilon_{j,k},\widetilde{\psi}_{j,l})|\leqslant C\exp(-\eta|k-l|), \tag{6.1}$$

其中 $\eta>0$, $C>0$ 是两个常数.

由此立刻得结果

$$|\mathrm{R}_j(x,y)|\leqslant C2^{nj}(1+2^j|x-y|)^{-n-1} \tag{6.2}$$

和

$$|\nabla_x R_j(x,y)|+|\nabla_y R_j(x,y)|\leqslant C2^{(n+1)j}(1+2^j|x-y|)^{-n-2}$$

此外因为 $\psi^\varepsilon_{j,k}$ 积分为零,我们有 $\int R_j(x,y)dy=0$.

这些性质蕴涵对于 R 的核 $R(x,y)$ 的通常的估计以及 R 的弱连续性.

事实上,弱连续性证明要点在于当 $u(x)$ 和 $v(y)$ 是两个支集含于半径为 R 的同一个球 B 的正则函数时,上估 $\sum_{-\infty}^{\infty}\iint R_j(x, y)u(y)v(x)dx$.

若 $2^{-j}>R$,仅利用 $|R_j(x,y)|\leqslant C2^{nj}$即可上估积分,而若 $2^{-j}\leqslant R$,我们注意

$\int R_j(x,y)u(y)dy=\int R_j(x,y)(u(y)-u(x))dy$. 后一积分可上估为 $\|\nabla u\|_\infty\int|R_j(x,y)||y-x|dy\leqslant C2^{-j}\|\nabla u\|_\infty$. 结论是显然的.

由于 $\int R_j(x,y)dy=0$,我们有 $R(1)=0$. 还剩下计算 ${}^tR(1)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}^tR_j(1)$.

依次令 $\varepsilon(j,l)=\int\tilde{\psi}_{j,l}(x)dx, m_j(x)=\sum_l \varepsilon(j,l)\tilde{\psi}_{j,l}$ 以及

$$\beta^\varepsilon(j,k)=B(y^\varepsilon_{j,k},m_j)=\int\mathscr{S}^\varepsilon_{j,k}(x)b(x)dx,$$

其中

$$\mathscr{S}^\varepsilon_{j,k}(x)=\mathscr{S}^\varepsilon_{j,k}(x)m_j(x).$$

沿用这些记号,我们有 $'R_j(1)=\sum_k\sum_l\beta^\varepsilon(j,k)\psi^\varepsilon_{j,k}$. 剩下的是证明系数 $\beta^\varepsilon(j,k)$ 满足第 5 章定理 4 给的必要充分条件.

从下列引理可直接得到结果.

引理 5 函数 $\mathscr{S}^\varepsilon_{j,k}, \varepsilon\in E, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n$,是小浪(在第 8 章定义 3 的意义下).

如果承认了这个引理,$\beta^\varepsilon(j,k)$ 就是 $b\in L^\infty\subset\mathrm{BMO}$ 对于这些小浪的系数,从而满足 Carleson 的平方估计(第 5 章,定理 4 及有关这个定理的注释).

回到引理 5,我们有 $|\varepsilon(j,l)|\leqslant C2^{-nj/2}$(这是由于 $\tilde{\psi}_{j,l}$ 的性质). 由此得 $\|m_j(x)\|_\infty\leqslant C'$ 和 $\|\nabla m_j(x)\|_\infty\leqslant C'2^j$. 又有 $m_j(x)$ 属于 V_j(或按照第 2 章的记号宁肯说成 $V_j(\infty)$). 由于 $\psi^\varepsilon_{j,k}$属于 W_j(和 $L^1(\mathbb{R}^n)$),积分 $\int\psi^\varepsilon_{j,k}(x)m_j(x)dx=0$(因为 W_j和 V_j正交). 函数 $S^\varepsilon_{j,k}$具有跟小波同样的正则性、局部性和抵消性;故这正是小浪.

在离开定理 2 之前,我们要由它推导出不等式 (5.5) 的一个值得注意的推广.

我们把 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数族 $w_\lambda(x)(\lambda\in\Lambda)$ 中的每个函数称为**相当于** $b(x)$ 的**小浪**,如果对两个指数 $\beta>\alpha>0$ 和某个常数 C 有

$$|w_\lambda(x)|\leqslant C2^{nj/2}(1+|2^jx-k|^{-n-\beta}, \qquad (6.3)$$

$$|w_\lambda(x') - w_\lambda(x)| \leqslant C2^{(n/2+2)j}|x' - x|^\alpha, \qquad (6.4)$$

和

$$\int w_\lambda(x)b(x)dx = 0. \qquad (6.5)$$

若 $b(x) = 1$，就重新得到第 8 章第 5 节的小浪.

下面要陈述的是定理 2 的一种初看更强实则等价的提法.

命题 5 在条件 (6.3)，(6.4) 和(6.5) 之下，存在一个常数 C，使得对所有系数序列 $\alpha(\lambda) \in l^2(\Lambda)$ 有

$$\left\| \sum \alpha(\lambda) w_\lambda(x) \right\|_2 \leqslant C\left(\sum |\alpha(\lambda)|^2 \right)^{1/2}. \qquad (6.6)$$

这个十分一般的估计特别地蕴涵了不等式 (5.5)，后者是定理2证明的基础.

为了证明 (6.6)，只需计算 $(w_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$在基 $\tilde{\varphi}_\lambda$(由定理 2 提供) 内的矩阵，并且验证这个矩阵定义一个在 $l^2(\Lambda)$ 上的连续算子.

该矩阵的元素 $\omega(\lambda,\lambda')$ 由 $\omega(\lambda,\lambda') = \int w_\lambda(x)\tilde{\varphi}_{\lambda'}(x)b(x)dx$ 给出(定理 2 的推论1). 我们打算验证对某一个指数 $\gamma > 0$ 和某一个常数 C 有

$$|\omega(\lambda,\lambda')| \leqslant C2^{-|j'-j|(n/2+\gamma)}\left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |k2^{-j} - k'2^{-j'}|} \right)^{n+\gamma}. \qquad (6.7)$$

那么我们的矩阵的连续性将从 Schur 引理推得. 而估计 (6.7) 从“一个简单的分部积分”得到：若 $j' \geqslant j$，$w_\lambda(x)$ 起“平坦函数”的作用，而乘积 $b(x)\tilde{\varphi}_\lambda(x)$ 是“摆动且强局部”的函数. 其细节跟有关 $b(x) = 1$ 的相同，因而留给读者.

7. 回到 $T(b)$ 定理

我们从一个特殊情形开始，不过它还是能够提供在所有

Lipschitz 曲线上 Cauchy 核的连续性.

假定 $(1+|x-y|)^{n+1}K(x,y)$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，这是一个定性性质，我们避免在定量的形式下利用它.

还要假设 $K(y,x)=-K(x,y)$ 和

$$|\nabla_x K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n-1}. \tag{7.1}$$

设函数 $b(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 几乎处处满足 $\operatorname{Re} b(x)\geqslant 1$.

定理 3 设在反对称性和(7.1)之外，还假定关于 x 恒等地有 $\int K(x,y)b(y)dy=0$，则由核 K 定义的算子在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界，且 $T:L^2\to L^2$的范数 $\|T\|$ 满足

$$\|T\|\leqslant C(C_0,n,\|b\|_\infty). \tag{7.2}$$

这个估计的价值在于不依赖于 $(1+|x-y|)^{n+1}K(x,y)$ 的 L^∞范数，在这个意义下估计 (7.2) 是一致的.

为证明定理 3，我们步步沿用 $T(1)$ 定理的论证.

考虑核 $L(x,y)=K(x,y)b(y)$ 和由这个核定义的算子 $\mathscr{L}$. 再把定理 2 中的小波记作 $\tilde{\psi}_\lambda,\lambda\in\Lambda$. 计算 $\mathscr{L}$ 在基 $\tilde{\psi}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 里的矩阵 $(\omega(\lambda,\lambda'))_{(\lambda,\lambda')\in\Lambda\times\Lambda}$之后即可获得 $\mathscr{L}$ 的连续性.

且看如何计算这个矩阵. 若把 $f\in L^2$分解为 $f=\sum\alpha(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda$，那么 $\mathscr{L}(f)=\sum\beta(\lambda)\tilde{\psi}_\lambda$，而

$$\beta(\lambda)=\int\mathscr{L}(f)\tilde{\psi}_\lambda b(x)dx=\sum_{\lambda'\in\Lambda}\alpha(\lambda')\int\mathscr{L}(\tilde{\psi}_{\lambda'})(x)\tilde{\psi}_\lambda(x)b(x)dx$$
$$=\sum_{\lambda'\in\Lambda}\omega(\lambda,\lambda')\alpha(\lambda').$$

于是

$$\omega(\lambda,\lambda')=\iint K(x,y)b(y)\tilde{\psi}_{\lambda'}(y)b(x)\tilde{\psi}_\lambda(x)dydx. \tag{7.3}$$

剩下的是用

$$C2^{-|j-j'|(n/2+\gamma)}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|k2^{-j}-k'2^{-j'}|}\right)^{n+\gamma}$$

上估 $|\omega(\lambda,\lambda')|$. 这将允许利用 Schur 定理.

问题关于 λ 和 λ' 是完全对称的. 于是可限于 $j'\leqslant j$ 的情形. 情形 $j'=j$ 搁置到论证的末尾,而从假定 $j'<j$ 作为开始. 为计算 $\omega(\lambda,\lambda')=\int\tilde{\psi}_{\lambda'}(y)h_\lambda(y)dy$,先把 $h_\lambda(y)$ 正交投影到 V_j上, V_j包含 $\widetilde{W}_j$(由于小波 $\tilde{\psi}_\lambda$的几何构造).

这个正交投影 g_λ等于 $\sum_l\theta_j(k,l)\varphi_{j,l}$,其中

$$\theta_j(k,l)=\iint K(x,y)b(y)\varphi_{j,l}(y)b(x)\tilde{\psi}_\lambda(x)dydx. \qquad (7.4)$$

我们打算证明

$$|\theta_j(k,l)|\leqslant C(1+|k-l|)^{-n-1}. \qquad (7.5)$$

现在条件 $T(b)=0$ 就表示成 $\sum_l\theta_j(k,l)=0$,而 $\omega(\lambda,\lambda')$ 表示成了一个"平坦"函数 $\tilde{\psi}_{\lambda'}$同一个十分局部化又摆动的函数 (g_λ) 的乘积的积分. 可用第 8 章的引理 3 并得所要估计.

为证 (7.5),从一个形如

$$I=\iint K(x,y)b(y)u(y)b(x)v(x)dydx$$

的二重积分 这一典型情形出发. 其中 u 和 v 是 C^1类的两个函数,支集分别含于 $|x-x_0|\leqslant 1$ 和 $|y-y_0|\leqslant 1$,还满足 $|\nabla u|_\infty\leqslant 1$, $\|\nabla v\|_\infty\leqslant 1$,并且 $\int v(x)b(x)dx=0$.

我们打算证明

$$|I|\leqslant C(1+|x_0-y_0|)^{-n-1}. \qquad (7.6)$$

若 $|x_0-y_0|\leqslant 3$,核 $K(x,y)b(x)b(y)$ 的反对称性以及函数 u 和 v 的正则性允许写出

$$I=\frac{1}{2}\iint K(x,y)b(x)b(y)(u(y)v(x)-u(x)v(y))dxdy,$$

并推得 (7.6).

若 $|x_0-y_0|>3$,利用核关于 x 的正则性以及 dv 的积分是零这一事实,这时可进行分部积分.

基于两个理由，我们并非处在典型情形下，比例是 2^{-j} 而非 1（这个比例是由函数 $\varphi_{j,l}$ 和 $\tilde{\varphi}_\lambda$ 确定的比例），尤其是函数 $\psi_{j,l}$ 和 ψ_λ 不是紧支的而是指数下降的. 为了化到 $j=0$ 的情形，利用比例的变换，而这毫不破坏对 $K(x,y)$ 和 $b(x)$ 作的假设.

为了化到紧支函数的情形，只需利用下列考察.

引理6 对所有整数 n，存在 $R(n)>0$ 使下列性质成立. 对 $\gamma>0$，存在一个常数 $C'(\gamma,n)$ 使得当 $f(x)$ 满足 $|f(x)|\leqslant \exp(-\gamma|x|)$，$|\nabla f(x)|\leqslant \exp(-\gamma|x|)$ 和 $\int f(x)b(x)dx=0$ 时，可把 f 分解成级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\gamma_k f_k(x)$，其中 f_k 的支集含于 $|x-k|\leqslant R(n)$，$\|f_k\|_\infty\leqslant 1$，$\|\nabla f_k\|_\infty\leqslant 1$，$\int f_k(x)b(x)dx=0$，并且系数 γ_k 满足 $|\gamma_k|\leqslant C'(\gamma,n)\exp(-\gamma|k|)$.

为使记号简单，限于在 $n=1$ 的情形下论证. 取定一个 C^1 类函数 $\theta\geqslant 0$，其支集在 $[-1,1]$ 内并使 $\sum_{-\infty}^{\infty}\theta(x-k)=1$. 进行"难点分散"，令 $f(x)=\sum f(x)\theta(x-k)=\sum_{-\infty}^{\infty}m_k(x)$. 记 $I_k=\int m_k(x)b(x)dx$，则有 $|I_k|\leqslant C\exp(-\gamma|k|)$ 和 $\sum_{-\infty}^{\infty}I_k=0$. 这允许写出 $I_k=J_{k+1}-J_k$，这里 $|J_k|\leqslant C'\exp(-\gamma|k|)$. 再令 $\omega_k=\int\theta(x-k)b(x)dx$，则有 $\operatorname{Re}\omega_k\geqslant 1$. 对 m_k 所作的校正是用 $\gamma_k f_k(x)=m_k(x)-(r_{k+1}(x)-r_k(x))$ 代替 m_k，其中 $r_k(x)=J_k\omega_k^{-1}\theta(x-k)$. 我们有 $\int r_k(x)b(x)dx=J_k$，因而 $\int f_k(x)b(x)dx=0$，这正是所要求的. 对 f_k 所要求的其它性质显然满足.

借助 (7.6)，由引理 5 得 (7.5)，为结束定理 3 的证明，只需

利用第 8 章的引理 3 以及 Schur 引理. 证明的这后一部分同对 $T(1)$ 定理所作的相同,因而就不再说明了.

8. 对于 Cauchy 核的 L^2的连续性的应用

现转回到 1 维,以一个实值 Lipschitz 函数 $a(x)$ 作为出发点,于是函数 $b(x)$ 是 $1+ia'(x)$,若 $-M\leqslant a'(x)\leqslant M$,则有 $\|b\|_\infty\leqslant\sqrt{1+M^2}$,而 $\operatorname{Re} b(x)=1$.

对所有 $\varepsilon>0$,考虑截断核

$$C_\varepsilon(x,y)=(z(x)-z(y)+i\varepsilon)^{-1}-(z(x)-z(y)+i\varepsilon^{-1})^{-1},$$

其中 $z(x)=x+ia(x)$. 由于函数 $a(x)$ 的图象 Γ 的几何特性,当 $|x-y|$ 趋于无穷时 $C_\varepsilon(x,y)=O((x-y)^{-2})$. 此外,$C_\varepsilon(x,y)$ 有界(但这两个估计依赖于 $\varepsilon>0$).

由 Cauchy 公式得 $\int C_\varepsilon(x,y)z'(y)dy=0$,$C_\varepsilon(x,y)$ 的唯一不足是没有反对称性. 于是考虑 $\Gamma_\varepsilon(x,y)=C_\varepsilon(x,y)-C_\varepsilon(y,x)$,对它可利用定理 2. 不难证明若 u 是 C^1 类的且有紧支集,则有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{z(x)-z(y)+i\varepsilon}+\frac{1}{z(x)-z(y)-i\varepsilon}\right\}z'(y)u(y)dy$$

$$=2\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|\geqslant\varepsilon}\frac{1}{z(x)-z(y)}z'(y)u(y)dy. \tag{8.1}$$

为证明这一等式只需分部积分. 最后对所有 Lipschitz 曲线 Γ Cauchy 核在 $L^2(\Gamma)$ 上有界.

下章我们将更细致地进行这些考虑.

9. 一般情形下的 $T(b)$ 定理

设 $K(x,y)$ 是一个使 $(1+|x-y|)^{n+1}K(x,y)$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 的函数. 这个定性性质使得在定义算子 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 时关于函数 $b(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 不产生棘手的问题.

第一组假设是关于核 $K(x,y)$ 的，假定存在一个指数 $\gamma\in]0,1]$ 和一个常数 C_0使

$$|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n},\tag{9.1}$$

当 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x',y)-K(x,y)|\leqslant C_0|x'-x|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}$, (9.2)

并且当 $|y'-y|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x,y')-K(x,y)|\leqslant C_0|y'-y|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}$. (9.3)

第二组假设涉及到一个函数 $b(x)\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，它几乎处处满足 $\mathrm{Re}\, b(x)\geqslant 1$.

我们要求存在一个常数 C_1 使对所有球 $B\subset\mathbb{R}^n$有

$$\int_B\left|\int_B K(x,y)b(y)dy\right|dx\leqslant C_1|B|\tag{9.4}$$

和

$$\int_B\left|\int_B K(x,y)b(x)dx\right|dy\leqslant C_1|B|\tag{9.5}$$

我们有

定理 4 在假设 (9.1) 至 (9.5) 之下，由 $K(x,y)$ 定义的算子 T 的范数不超过 $C_2=C_2(C_0,C_1,\|b\|_\infty,n)$.

这个定理的证明采用 $T(1)$ 定理证明的方法，差别是通常的小波被适应于函数 b 的小波取代.

首先我们要验证，(9.4) 和(9.5) 为一方，通常的条件 $T(b)\in$ BMO, ${}^tT(b)\in$ BMO 以及写成如下形 式

$$\left|\iint_{B\times B}K(x,y)b(x)b(y)u(x)v(y)dxdy\right|$$
$$\leqslant C|B|(\|u\|_\infty\|v\|_\infty+r^2\|\nabla u\|_\infty\|\nabla v\|_\infty)\tag{9.6}$$

的弱抵消性为另一方，这二者之间是等价的.

作为开始，我们验证出现在 (9.4) 中的常数 C_1可以控制

$T(b)$ 在 BMO 中的范数.

为此用 B 表示任意一个(中心为 x_0 半径为 $r>0$)的球,并把 b 分解成 $b_1+b_2+b_3$,其中 b_1 是 b 同 B 的指示函数的乘积,b_2 是 b 同由 $r\leqslant|x-x_0|\leqslant 2r$ 确定的环 Δ 的指示函数的乘积,b_3 是 b 同 $|x-x_0|\geqslant 2r$ 的指示函数的乘积.

正如我们经常注意到的那样,若 $|x-x_0|\leqslant r$,则有

$$
\begin{aligned}
&|Tb_3(x)-Tb_3(x_0)|\\
&\leqslant C|x-x_0|^{\gamma}\int_{|x_0-y|\geqslant 2r}|x_0-y|^{-n-\gamma}|b(y)|dy\leqslant C'\|b\|_{\infty}.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\iint_{B\times\Delta}|x-y|^{-n}dxdy\leqslant C(n)r^{n},
$$

我们可上估 $\int_B|Tb_2(x)|dx$.

最后由 (9.4) 可估计 $\int_B|Tb_1(x)|dx$.

为建立 (9.6),写下等式

$$
\begin{aligned}
T(bv)(x)=&\int K(x,y)b(y)(v(y)-v(x))\chi(y)dy\\
&+v(x)\int K(x,y)b(y)\chi(y)dy,
\end{aligned}
$$

其中 χ 是 B 的指示函数.

第一个积分上估为 $C\|\nabla v\|_{\infty}\int_{|x-y|\leqslant 2r}|x-y|^{-n+1}dy\leqslant C'r\|\nabla v\|_{\infty}$,而第二个积分由 (9.4) 估计.

反之,假定 (9.6) 成立并且 $T(b)$ 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 为证明 (9.4),只需利用 BMO 空间的定义,如果知道了 BMO 空间的定义中出现 的"浮动常数"可以等于 0.

为估计这个浮动常数,把 B 的"双倍"(相应地"四倍")球记为 $2B$ (相应地 $4B$),并设函数 $v\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 $2B$ 上等于 1,在 $4B$ 外等于 0,此外还满足 $0\leqslant v(x)\leqslant 1$ 和 $\|\nabla v\|_{\infty}\leqslant C/r$ ($r>0$ 是 B 的半径). 令 $w=1-v$,跟前面一样,有

$$|T(wb)(x)-T(wb)(x_0)|\leqslant C\|b\|_\infty$$

(x_0是球 B,$2B$ 和 $4B$ 的中心). 由于 $T(b)$ 属于 BMO,存在常数("浮动常数")γ_B使

$$T(vb)(x)=\gamma_B+r_B(x),\text{其中}\int_B|r_B(x)|dx\leqslant C|B|.$$

为了估算这个"浮动常数"的值,用$u(x)$表示一个被 B 支撑的 C^1类的函数,它取正值或零,满足 $\|\nabla u\|_\infty\leqslant Cr^{-n-1}$ 并且积分为 1. 从而有 $\|u\|_\infty\leqslant Cr^{-n}$.

性质 (9.6) (当用 $4B$ 代替 B 时) 可写成

$$\left|\int u(x)b(x)T(vb)(x)dx\right|\leqslant C'.$$

考虑到 $T(vb)(x)=\gamma_B+r_B(x)$,由此得 $\left|\gamma_B\int u(x)b(x)dx\right|\leqslant C''$.

但是 $\mathrm{Re}\int u(x)b(x)dx\geqslant 1$,从而 $|\gamma_B|\leqslant C''$.

在对定理 4 的陈述作过这些变动之后,我们回到它的证明. 只需逐字沿用 $T(1)$ 定理的证明,不同的只是通常的小波代之以小波 ψ_λ,后者的抵消性是适应于函数 b 的.

以构造伪积作为开始. 它们以一种非线性方式适应于函数 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们从一个函数 $\beta\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 出发,并且打算构造 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续线性算子 T,其核一旦限制在 $x\neq y$ 上,就满足通常的估计,此外 T 还满足 $T(b)=\beta$ 和 ${}^tT(b)=0$.

为了构造 T ,我们模仿通常的伪积的算法. 即令 $\theta_\lambda(x)=2^{nj}\theta(2^jx-k)$,这里 $\theta\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,$\int\theta(x)dx=1$,$\lambda=2^{-j}a(k+\varepsilon/2)$, $\varepsilon\in E$. 设 $\omega(\lambda)=\left[\int b(x)\theta_\lambda(x)dx\right]^{-1}$;我们有 $\mathrm{Re}\int b(x)\theta_\lambda(x)dx\geqslant 1$,因而 $|\omega(\lambda)|\leqslant 1$.

小波 ψ 就是前几节曾构造过的 (它适应于 $b(x)$). 定义

$$\pi(\beta,f)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega(\lambda)\langle f,\theta_\lambda\rangle\langle\beta,b\tilde{\psi}_\lambda\rangle\tilde{\psi}_\lambda,$$

其中 $\langle u,v\rangle=\int u(x)v(x)dx$.

首先验证算子 $T(f)=\pi(\beta,f)$ 的核满足标准的估计. 积分 $\int b(x)\widetilde{\psi}_\lambda(x)dx$ 是零，并且在无穷远有 $|b(x)\psi_\lambda(x)| = O(|x|^{-n-1})$. 即 $b(x)\psi_\lambda(x)$ 是 Stein 和 Weiss 的 H^1空间的一个分子. 注意 $\widetilde{\psi}_\lambda(x)$ 不是一个分子(它甚至都不属于 H^1). 最后还有 $|\langle\beta,b\widetilde{\psi}_\lambda\rangle| \leqslant C2^{-nj/2}\|\beta\|_{\mathrm{BMO}}$. 其余的估计容易得到. 而当 $|\gamma(\lambda)| \leqslant C2^{-nj/2}$时核

$$K(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega(\lambda)\gamma(\lambda)2^{nj}\theta(2^jy-k)\widetilde{\psi}_\lambda(x)$$

满足通常的估计.

现在过渡到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 连续性的证明. 考虑到定理 2,必须证明

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle f,\theta_\lambda\rangle|^2|\langle\beta,b\widetilde{\psi}_\lambda\rangle|^2 \leqslant C^2\|\beta\|_{\mathrm{BMO}}^2\|f\|_2^2. \tag{9.7}$$

(9.7) 的证明可归结为验证对所有二进立方体 Q 有

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|\langle\beta,b\widetilde{\psi}_\lambda\rangle|^2 \leqslant C|Q|. \tag{9.8}$$

一旦建立了 (9.8) ，Carleson 不等式直接提供 (9.7).

为了验证 (9.8)，采用出现在第 5 章定理 4 中的证明. 估计 (9.8) 从定理2 提供的下列"Plancherel 公式"

$$\|f\|_2^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle f,b\widetilde{\psi}_\lambda\rangle|^2, \tag{9.9}$$

小波 $b\widetilde{\psi}_\lambda$的局部性以及条件 $\int b(x)\widetilde{\psi}_\lambda(x)dx=0$ 得到. 后一条件允许取消 BMO 空间定义中的"浮动常数".

由于 $\pi(\beta,b)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle\beta,b\widetilde{\psi}_\lambda\rangle\widetilde{\psi}_\lambda=\beta$(定理 2 的推论),遂有 $T(b)=\beta$. 又由于 $\int\widetilde{\psi}_\lambda(x)b(x)dx=0$,故而 ${}^tT(b)=0$.

$T(b)$ 定理的证明逐字沿用 $T(1)$ 定理的证明. 借助伪积校正 T,就把 T 化成一个算子 R,它满足条件 (9.1),(9.2),(9.3) 和 (9.6) 以及 $R(b)={}^tR(b)=0$. 为得到这样的一个算子的 L^2连续性,只需估算矩阵元素 $\tau(\lambda,\lambda')=\langle R(b\widetilde{\psi}_\lambda),b\widetilde{\psi}_{\lambda'}\rangle$,并证明

$$|\tau(\lambda,\lambda')| \leqslant C2^{-|j-j'|(n/2+\gamma)}\left[\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|k2^{-j}-k'2^{-j'}|}\right]^{n+\gamma}. \tag{9.10}$$

一旦 (9.10) 被建立，R 的 L^2连续性就由 Schur 引理推断出来.

为证明 (9.10)，只需沿用在反对称情形所用的方法，细节留给读者.

10. 空间 H_b^1

仍然假定 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathrm{Re}\, b(x) \geqslant 1$ 几乎处处成立. 我们现在要定义的空间 H_b^1仅是通常的 Hardy 空间的一个仿制品，同样其对偶 BMO_b仅是 BMO 的一个仿制品. 不过它们有一个长处，即其抵消性是适应于"复测度" $b(x)dx$ 的，并且因而直接联系着"$T(b)$ 定理".

我们说 $f \in H_b^1$，如果 bf 属于 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ (按由 Stein 和 Weiss 给的实变量说法). 换句话说，H_b^1的函数允许一个原子分解 $f(x)=\sum \alpha_j a_j(x)$，这里 $\sum|\alpha_j|<\infty$，而 $a_j(x)$ 在下列意义下是原子：存在一个相应于 $a_j(x)$ 的球 B_j，其体积为 $|B_j|$，使得 a_j的支集含于 B_j，$\|a_j\|_\infty \leqslant |B_j|^{-1}$，并且 $\int a_j(x)b(x)dx=0$.

下列结果远非显然.

命题 6 适应于 $b(x)$ 的小波 $\tilde{\psi}_\lambda$形成 H_b^1的一个无条件基.

我们要证明一个更精密的命题. 对所有 $\lambda=(k+\varepsilon/2)2^{-j} \in \Lambda$，$\varepsilon \in \{0,1\}^n$，$\varepsilon \neq 0$，把由 $2^j x-k \in [0,1[^n$定义的二进立方体记作 $Q(\lambda)$，那么以下两个性质是等价的

$$\Big[\sum_{Q(\lambda) \ni x} |\alpha(\lambda)|^2 |Q(\lambda)|^{-1}\Big]^{1/2} \in L^1(dx), \tag{10.1}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) \widetilde{\varphi}_\lambda(x) \in H_b^1. \tag{10.2}$$

事实上，用 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 表示标准正交小波的通常基(相关于 $b = 1$ 并且有正则性 $r \geqslant 1$)，并考虑由 $J(\psi_\lambda) = \widetilde{\varphi}_\lambda$定义的算子 J. 于是 J 的分布核是 $\sum_{\lambda \in \Lambda} \widetilde{\varphi}_\lambda(x) \psi_\lambda(y)$，而这个分布核在 $x \neq y$ 上的限制满足用来定义 Calderon-Zygmund 算子的估计. $\widetilde{\varphi}_\lambda$和 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的无条件基这一事实推断出 J 的 L^2连续性. 由此得知 J 是一个 Calderon-Zygmund 算子. 用 B 表示乘以 $b(x)$ 的逐点乘法算子，并考虑算子 $T = BJ$. 我们有 ${}^t T(1) = 0$，而第 7 章定理 3 蕴涵 T 在通常的 空间 H^1上是连续的. 这表明 J 从 H^1到 H_b^1连续. 然后证明 $J(H^1) = H_b^1$，为此只需验证 $J^{-1}(H_b^1) \subset H^1$.

J^{-1}的分布核是 $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) \widetilde{\varphi}_\lambda(y) b(y)$. 这表明 $J^{-1} = LB$，这里 L 是一个满足 ${}^t L(1) = 0$ 的 Calderon-Zygmund 算子. 然后只需再次应用第 7 章定理 3.

于是我们的算子 J 是 H^1和 H_b^1间的一个同构，而 (10.1) 和 (10.2) 间的等价性即从第 5 章定理 1 得到.

在分布和检验函数之间的自然对偶中，H_b^1 的对偶空间是 BMO_b. 一个函数 f 属于 BMO_b，当且仅当 $f = bu$ 而 $u \in \mathrm{BMO}$. 另一特征刻画是序列 $\langle f, \widetilde{\varphi}_\lambda \rangle, \lambda \in \Lambda$，满足通常的 Carleson 条件.

H_b^1这个空间自然地联系着来自复分析的 Hardy 空间. 设 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ 是实变量 x 的取实值的一个 Lipschitz 函数 $a(x)$ 的图象. 又设 Ω_2是"在 Γ 下方"的开集，而 Ω_1是"在 Γ 上方"(由 $y > a(x)$ 定义) 的开集. 空间 $H^1(\Omega_1)$ 由在 Ω_1内全纯并使

$$\sup_{\tau > 0} \int_\Gamma |F(z + i\tau)| ds$$

有穷的函数 $F(z)$ 组成. 同样定义 $H^1(\Omega_2)$. 若 F 属于 $H^1(\Omega_1)$，那么在 $L^1(\Gamma)$ 范数和几乎处处的意义下，$\lim_{\tau \downarrow 0} F(z + i\tau) = F(z)$ 存在，并且对所有 $z_0 \in \Omega_1, F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - z_0} dz$. 从而边值完全

决定了函数 $F \in H^1(\Omega_1)$. 余下的问题是描述由这些边值组成的 Banach 空间. 为此,利用 Γ 的通过横坐标 x 的参数表示 $(z(x) = x + ia(x), -\infty < x < \infty)$,若 $b(x) = 1 + ia'(x)$,则有

$$F \in H^1(\Omega_1) \Leftrightarrow F(z(x)) = f(x) \in H_b^1(\mathbb{R}), \tag{10.3}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(z(x) - z_2)^{-1} z'(x) dx = 0, \text{对所有 } z_2 \in \Omega_2. \tag{10.4}$$

换句话说, $H^1(\Omega_1)$ 等同于 H_b^1 的一个闭向量子空间. 对 $H^1(\Omega_2)$ 亦然.

注意 H_b^1 是两个闭子空间 $H^1(\Omega_1)$ 和 $H^1(\Omega_2)$ 的直和. 事实上,把 Cauchy 算子 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) d\zeta$ 的(从上或从下取的)边值应用到任意一个函数 $f \in H_b^1$ 即得分解 $f = f_1 - f_2$,其中 $f_1 \in H^1(\Omega_1)$,而 $f_2 \in H^1(\Omega_2)$. 这个 Cauchy 算子在空间 H_b^1 上的连续性源于它在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的连续性和第 7 章定理 3. 事实上,核 $K(x,y) = z'(x)(z(x) - z(y))^{-1}$ 关于 y 具有必须的正则性并满足 $\int K(x,y)dx = 0$ (以常数为模). 为了从这些形式的考虑过渡到精确的陈述,只需再次用由

$$K_{\varepsilon,T}(x,y) = z'(x)[((z(x) - z(y)) \pm i\varepsilon)^{-1} - (z(x) - z(y) \pm iT)^{-1}]$$

定义的正则核 $K_{\varepsilon,T}$ 逼近核 K.

H_b^1 的一个值得注意的向量子空间是由特殊的原子产生的空间,把这个空间记作 $\widetilde{B}_1^{0,1}$,它由形如 $\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda)\widetilde{\varphi}_\lambda$ 的函数 $f \in H_b^1$ 组成,其中 $\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)| 2^{-j/2} < \infty$;这个级数定义 f 在 $\widetilde{B}_1^{0,1}$ 内的范数. 在情形 $b(x) = z'(x) = 1 + ia'(x)$ 并且 $-M \leqslant a'(x) \leqslant M$ 之下,函数 $\delta(z_0)(z - z_0)^{-2}$ 限制在 Γ 上时属于 $\widetilde{B}_1^{0,1}$;这里用 $\delta(z_0)$ 表示从 z_0 到 Γ 的距离,而 $\delta(z_0)(z - z_0)^{-2}$ 在 $\widetilde{B}_1^{0,1}$ 内的范数不超过

$C(M)$.

"特殊原子"形成 $\widetilde{B}_1^{0,1}$内的一个完全部分，更精确地说，所有函数 $f \in \widetilde{B}_1^{0,1}$可写成

$$f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k \delta(z_k)(z - z_k)^{-2}, z = z(x), \tag{10.5}$$

其中 $z_k \notin \Gamma$，而 $\sum_0^\infty |\lambda_k| < \infty$.

这个原子分解的证明是读者可在 [73] 中发现的相应于 $a(x) = 0$ 的证明的直接改写. 反之，(10.5) 中所写的级数收敛到 $\widetilde{B}_1^{0,1}$中的函数. (10.5) 直接提供了 $\widetilde{B}_1^{0,1}$到两个 Bergman 空间 $B^1(\Omega_1)$ 和 $B^2(\Omega_2)$ 的直和分解；$f_1 \in B^1(\Omega_1)$，当且仅当 f_1 在 Ω_1 全纯且 $\iint_{\Omega_1} |f'_1(z)| dxdy < \infty$. 为得到这一分解，只需在 (10.5) 右端组合所有相应于 $z_k \in \Omega_2$的项以定义 $f_1(x)$.

用 $B^\infty(\Omega_1)$ 表示 Bloch 空间，它有在 Ω_1 全纯并且使 $\sup_{z \in \Omega_1} \delta(z)|f'(z)|$ 有穷的函数 $f(z)$ 组成.

在参照 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma, ds)$ 上考虑双线性形式 $B(f,g) = \int_\Gamma f(z)g(z)dz$，这对应本章第 4 节一般定义中的特殊情形 $b(x) = 1 + ia(x)$. 那么 Hardy 空间 $H^2(\Omega_1)$ 的对偶正是 $H^2(\Omega_2)$，只要对偶是由双线性形式 B 定义. 事实上，$H^2(\Omega_1)$ 是 $L^2(\Gamma, ds)$ 的一个向量子空间，Hahn-Banach 定理提供表示 $\lambda(f) = \int_\Gamma f(z)h(s)ds$，其中 $h \in L^2(\Gamma, ds)$，再记 $h(s)/z'(s) = g_1 + g_2$，这里 $g_1 \in H^2(\Omega_1)$，而 $g_2 \in H^2(\Omega_2)$；这个分解由 $L^2(\Gamma)$ 上由 Cauchy 核定义的算子的连续性提供. 由于 $f(z)$ 和 $g(z)$ 属于 $H^2(\Omega_1)$，我们有 $\int_\Gamma f(z)g_1(z)dz = 0$. 于是留下 $\lambda(f) = \int_\Gamma f(z)g_2(z)dz$，正如断言的那样，逆命题是显然的. 类似的推理指出 $H^p(\Omega_1)$ 的对偶是 $H^q(\Omega_2)$，这里 $1 < p < \infty, 1 < q < \infty, 1/p + 1/q = 1$. 最后，

$H^1(\Omega_1)$ 的对偶是 BMO(Ω_2)，而 $B^1(\Omega_1)$ 的对偶是 $B^\infty(\Omega_2)$，只要对偶由 $\int_\Gamma fgdz$ 定义.

后一断言的验证是饶有兴味的. 特殊原子 $\delta(w)(z(x)-w)^2$，$w\in\Omega$，生成了 $B^1(\Omega_1)$，而为了验证一个全纯函数 $g:\Omega_2\to\mathbb{C}$ 属于 $B^1(\Omega_1)$ 的对偶，只需保证

$$\delta(w)\left|\int_\Gamma (z-w)^{-2}g(z)dz\right|\leqslant C. \tag{10.6}$$

但 $\int_\Gamma (z-w)^2 g(z)dz = -2\pi g'(w)$，从而 (10.6) 表明 $\sup_{w\in\Omega_2}\delta(w)|g'(w)|\leqslant C/2\pi$. 我们能够限于考虑 Ω_2的全纯函数这一事实源于我们关于 $H^2(\Omega_1)$ 和 $H^2(\Omega_2)$ 之间的对偶所作的注释.

因而这里发生的一切表明函数 $(z-w)^{-2}$，$w\in\Omega_2$，犹如属于 $H^2(\Omega_1)$ 的小波，经过同 $H^2(\Omega_2)$ 或 Ω_2内全纯函数的其它空间的对偶，使我们用简单的条件分析这些空间. 自然 Ω_1和 Ω_2扮演对称的角色. 同时这些函数 $(z-w)^{-2}$，$w\in\Omega_2$，作为“原子”，经过适当的线性组合，可以表示 Ω_1上的全纯函数.

最后提及空间 $\widetilde{B}_\infty^{0,\infty}$是 $\widetilde{B}_1^{0,1}$的自然对偶. 一个分布 S 属于 $\widetilde{B}_\infty^{0,\infty}$，当且仅当我们有 $|\langle S,\tilde{\psi}_\lambda\rangle|\leqslant C2^{-j/2}$，$\lambda\in\Lambda_j$，$j\in\mathbb{Z}$. 事实上我们注意到 $\widetilde{B}_\infty^{0,\infty}$是以函数 $b(x)$ 为模定义的. 在 $b(x)=1+ia'(x)$ 这种情形，所有分布 $S\in\widetilde{B}_\infty^{0,\infty}$以唯一方式写成 $S=bS_1+bS_2$，其中 $S_1\in B^\infty(\Omega_1)$，而 $S_2\in B^\infty(\Omega_2)$.

11. $T(b)$ 定理的一般陈述

设 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子. 首先假定 T 具有弱连续性，这是 L^2连续性的一个必要条件. 其次假设 T 的分布核 $S(x,y)$ 在 $x\neq y$ 的限制是一个满足 $|L(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-n}$的函数 $L(x,y)$.

那么 T 自然地扩张到紧支的且指数为 $\eta>0$ 的 Hölder 函数

的空间，而若 f 和 g 是两个这样的函数，那么 $\langle T(f), g\rangle$ 有意义.

然后为陈述作为 T 的 L^2连续性的必要充分条件的补充条件，引进函数 b. 我们假定 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Re}\, b(x) \geq 1$. 还假定 $L(x, y) = b(x)K(x,y)b(y)$，其中 $K(x,y)$ 满足 (9.1)，(9.2) 和 (9.3).

这时可陈述 T 的 L^2连续性的一个必要充分条件. 这个条件又一次涉及到 $T(1)$ 和 $T'(1)$. 我们应当定义这两个数学对象. 若 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，表示定理 2 的全体小波（其正则性 $r \geq 1$），我们试图赋予 $\langle T(1), \tilde{\psi}_\lambda\rangle$ 一个意义.

为此，以处理更一般的 $\langle T(1), u\rangle$ 作为开始，这里 u 是一个紧支的 Lipschitz 函数，并且满足 $\int u(x)b(x)dx = 0$.

于是 ${}^tT(u) = \sigma$ 是一个分布，但在 u 的支集之外有

$$\sigma(x_0) = \int b(x)K(x, x_0)b(x_0)u(x)dx = O(|x_0|^{-n-\gamma}).$$

这是因为可用利用核关于 x 的正则性和 $\int b(x)u(x)dx = 0$ 这一事实. 由上可得 $\langle \sigma, 1\rangle$ 有意义.

为从（有紧支集的）特殊情形过渡到（Lipschitz 的，指数下降的且满足 $\int u(x)b(x)dx = 0$ 的函数 u 的）一般情形，我们利用引理 6.

小波系数 $\beta(\lambda) = \langle T(1), \tilde{\psi}_\lambda\rangle$ 确有意义，并且若这些系数满足 Carleson 条件 $\sum_{Q(\lambda)\subset Q} |\beta(\lambda)|^2 \leq C_1|Q|$，则记成 $T(1) \in \mathrm{BMO}_b$. 对系数 $\langle {}^tT(1), \tilde{\psi}_\lambda\rangle$ 有同样的注释.

现在是陈述"$T(b)$ 定理"的时候了.

定理 5 沿用上述记号，T 能够扩张为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续线性算子的必要充分条件是 T 具有弱连续性并且 $T(1) \in \mathrm{BMO}_b$, ${}^tT(1) \in \mathrm{BMO}_b$.

定理 5 的证明是定理 4 的证明的一个简单改写，恕不赘述.

12. 对于复分析的应用

作为定理 5 的应用，我们回到作用在空间 $L^2(\Gamma,ds)$ 上的 Cauchy 核的例子，其中 Γ 是一条 Lipschitz 曲线. 再不必利用可积核逼近，而直接推演如下. 依旧用 $a(x)$ 表示实变量 x 的取实值的一个 Lipschitz 函数. 于是有 $-M\leqslant a'(x)\leqslant M$. 然后作核 $K(x,y)=\dfrac{z'(x)z'(y)}{z(x)-z(y)}$；对某一个常数 C_0 有 $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-1}$，而核 K 的反对称性允许定义分布 $S=\mathrm{v.p.}K$. 这个分布属于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ 并且是一个连续线性算子 $T:\mathscr{D}(\mathbb{R})\to\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 的分布核. 为建立 T 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的连续性，只需验证以 z' 为模，$T(1)=0$. 这个等式本质上基于 Cauchy 公式. 我们有 $T(1)\in\widetilde{B}_{\infty}^{0,\infty}$，换句话说，$T(1)$ 是 $\widetilde{B}_1^{0,1}$ 上的一个连续线性型，通过对 $a(x)=\delta(z_0)(z(x)-z_0)^{-2}(z_0\notin\Gamma)$ 计算 $\langle T(1),a\rangle$ 即可得 $T(1)$ 在整个 $\widetilde{B}_1^{0,1}$ 上的值. 由于所用的原子形成 $\widetilde{B}_1^{0,1}$ 中的一个完全部分，计算上述那些值是足够的. 最后算得

$$\langle T(1),a\rangle=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint_{\{|\mathrm{Re}z-\mathrm{Re}w|\geqslant\varepsilon\}}(z-z_0)^{-2}(z-w)^{-1}dzdw=0$$

先对 z 再对 w 积分即可得之.

13. 相应于 $T(b)$ 定理的算子代数

我们依旧假定 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathrm{Re}\,b(x)\geqslant 1$. 设 T 是一个满足定理 5 假设的算子. 能否把 T 扩张成一个在 H_b^1 上的连续线性算子？当 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续并且 ${}^tT(1)=0$ 时，回答将是肯定的. 但这两个条件引导出一个在 H^1(Stein 和 Weiss 的通常空间) 上取值的 H_b^1 上的连续线性算子. 变换原来的问题将得到满意的结论. 令 $T=BL$，这里 B 是乘以 $b(x)$ 的逐点乘法算子.

于是算子 L 的分布核当限制在 $y \neq x$ 上时有形式 $K(x,y)b(y)$，这里 $K(x,y)$ 满足通常的条件 (9.1)，(9.2) 和 (9.3).

算子 L 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性和条件 ${}^tT(b)=0$(以函数 b 为模)蕴涵 L 在空间 H_b^1上的连续性. 令 $L=MB$，并对 M 应用第 7 章定理 3 即可证明这一事实.

若 $L(1)=0$，同一算子 L 在通常的 BMO 空间上将是连续的，用（第 7 章的）同一定理 3 的推论即可证之.

设 $\mathscr{L}$ 是在 H_b^1上和 BMO 上连续的上述类型算子 L 的族. 我们要验证 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}(L^2,L^2)$ 的一个代数. 为验证这一结论，沿用第 8 章所用的方法. 用 $(\tau(\lambda,\lambda'))_{(\lambda,\lambda')\in\Lambda\times\Lambda}$表示 L 在定理 2 中的小波基 $\tilde{\varphi}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 中的矩阵. 设 $0<\beta<\gamma$ (γ 是在谈论相应于 L 的核 $K(x,y)$ 关于 x 和 y 的正则性时出现的)，那么 $\tau(\lambda,\lambda')$ 属于 $\mathscr{M}_\beta$. 反之，若这个矩阵属于 $\mathscr{M}_\gamma$，L 的分布核是

$$\sum_\lambda\sum_\lambda \tau(\lambda,\lambda')\tilde{\varphi}_\lambda(x)\tilde{\varphi}_{\lambda'}(y)b(y).$$

容易验证（逐字重复 $b=1$ 时所作的计算）L 属于 $\mathscr{L}$(并且 $K(x,y)=\sum_\lambda\sum_{\lambda'}\tau(\lambda,\lambda')\tilde{\varphi}_\lambda(x)\tilde{\varphi}_{\lambda'}(y)$ 满足 $\beta=\gamma$ 时的 (9.1)，(9.2) 和 (9.3)).

一切都跟 $b=1$ 的情形一样，引进 Banach 代数 $A(b,\gamma)$，$0<\gamma<1$，它由算子 L 组成，这里的 L 在基 $\tilde{\varphi}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 内的矩阵属于 $\mathscr{M}_\gamma$. 定义不依赖于基的选取. 跟 $b=1$ 的情形不同，代数 $A(b,\gamma)$ 不是自伴的. 正由于此，在定理 5 的证明中不能使用 Cotlar 引理. 事实上，若 T 属于 $A(b,\gamma)$，T 在 H_b^1上和在 BMO 上连续；由此得 T 的转置在 H^1 上和 BMO_b上连续. 这就使得必须配合以乘以 $b(x)$ 的乘法算子 B，才能得到一个属于 $A(b,\gamma)$ 的算子.

代数 $\mathscr{L}$ 还可利用小浪予以阐明. 事实上，$L\in\mathscr{L}$，，当且仅当对满足 (6.3)，(6.4) 和 (6.5) 的整个族 w_λ，$\lambda\in\Lambda$，函数 $\tilde{w}_\lambda=L(w_\lambda)$ 将仍满足这些估计（指数 α 和 β 或许不同）. 基于这一观点，可证算子 $L\in\mathscr{L}$ 的 L^2连续性源于命题 5. 事实上，给定 $f\in L^2$，

把它分解为 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\tilde{\varphi}_\lambda$，其系数满足 $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}\leqslant C\|f\|_2$. 于是 $L(f)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\tilde{w}_\lambda$，其中 $\tilde{w}_\lambda=L(\tilde{\varphi}_\lambda)$. 只需利用命题 5 便得结论.

14. 推广到向量情形

当我们研究相应于一个 Lipschitz 图象的 Hardy 空间时（第 12 章定理 5），将需要定理 4 的 Hilbert 类似.

为此，必须引进空间 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;H)$，其中 H 是一个 Hilbert 空间. 如果 $f(x)$ 是局部平方可积函数，取值在 H 内，并且存在常数 C，使对所有的球 $B\subset\mathbb{R}^n$，可以找到一个向量 $\gamma(B)\in H$ 使

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\|f(x)-\gamma(B)\|_H^2dx\right)^{1/2}\leqslant C,$$

则说 f 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;H)$.

若 $f(x)$ 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;H)$，又设 $\tilde{\varphi},\lambda\in\Lambda$，是由定理 2 提供的小波，则小波系数 $\alpha(\lambda)=\int f(x)b(x)\tilde{\varphi}(x)dx$ 属于 H，并且满足 Carleson 条件

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}\|\alpha(\lambda)\|_H^2\leqslant C|Q|. \tag{14.1}$$

借助这个注释，便可沿用定理 4 的证明，并且得到定理 4 的向量说法，我们现在就来叙述它.

从核 $K:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to H$ 出发（H 是一个 Hilbert 空间），它使 $(1+|x-y|)^{n+1}\|K(x,y)\|_H$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，假定对于某个指数 $\gamma\in]0,1]$ 和某个常数 C_0 有

$\|K(x,y)\|_H\leqslant C_0|x-y|^{-n}$

$\|K(x',y)-K(x,y)\|_H\leqslant C_0|x'-x|^\gamma|x-y|^{-n-\gamma}$，当 $|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 时，

$\|K(x,y')-K(x,y)\|_H\leqslant C_0|y'-y|^\gamma|x-y|^\gamma|x\text{-}y|^{-n-\gamma}$，当

$|y'-y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时.

又假设存在一个常数 C_1 使对所有球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$\int_B \left\| \int_B K(x,y)b(y)dy \right\|_H dx \leqslant C_1|B|, \tag{14.2}$$

以及

$$\int_B \left\| \int_B K(x,y)b(x)dx \right\|_H dy \leqslant C_1|B|. \tag{14.3}$$

那么对数值函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 由 $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$ 定义的算子 T 从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n;H)$ 连续，并有

$$\|T\| \leqslant C_2 = C_2(C_0, C_1, n, \|b\|_\infty). \tag{14.4}$$

证明是我们在数量情形所给证明的直接抄写.

15. 推广到复数域代以 Clifford 代数的情形

设 $a:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数. 考虑核

$$K(x,y) = \frac{a(x)-a(y)-(x_1-y_1)\frac{\partial a}{\partial y_1}(y)-\cdots-(x_n-y_n)\frac{\partial a}{\partial y_n}(y)}{[|x-y|^2+(a(x)-a(y))^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

由 Calderon 提出的问题是要知道是否存在一个连续性算子 $T:L^2(\mathbb{R}^n;dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,dx)$，对 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 它可由 $T(f) = \text{v.p.}\int K(x,y)f(y)dy$ 定义.

定理 2 直接提供在情形 $n=1$ 下的结果，这是由于在这种情形，$K(x,y)$ 是相应于 $z(x) = x + ia(x)$ 的 Cauchy 核 $\frac{dz(y)}{z(x)-z(y)}$ 的虚部.

由第 9 章的结果知 T 实际上在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是连续的. 马上会

看到对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 和几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$,v. p. $\int K(x, y)f(y)dy$ 存在.

我们打算叙述 $T(b)$ 定理的一个推广,它可直接应用到双层位势而无需借助于旋转法.

以回顾 Clifford 代数 A_m的定义作为开始. 这个代数是 $\mathbb{R}$ 上的一个 2^m维向量空间,A_m的一个基由向量 e_S组成,这里 S 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意一个子集. 它暂时只不过是标记 2^m个向量的记号. 请看这些向量 e_S如何相乘.

设 $S = \varphi$, e_S是 A_m的单位元. 然后要求 A_m是由 $e_1,\cdots,e_m$(以 e_1 代替 $e_{\{1\}}$ 等等) 产生的结合代数. A_m中的关系由 $e_j^2 = -1, 1 \leqslant j \leqslant m$ 和 $j \neq k$ 时 $e_je_k = -e_ke_j$产生.

这就允许定义乘积 e_Se_T,这里 S 和 T 是 $\{1,\cdots,m\}$ 的任意两个子集,并且得到 $e_Se_T = \pm e_R$, R 是 S 和 T 的对称差,并且容易确定要选择的符号.

我们把向量空间 $\mathbb{R}^{m+1}$利用 $(x_0,x_1,\cdots,x_m) \to x = x_0 + x_1e_1 + \cdots + x_me_m$单射到 A_m内. 这样确定的元素称为 Clifford 数. 令 $\bar{x} = x_0 - x_1e_1 - \cdots - x_me_m$,则有 $|x|^2 = x\bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_m^2$. 由此可知所有非零 Clifford 数在 Clifford 代数中是可逆的,并且其逆也是一个 Clifford 数.

为了返回到奇异积分理论,从一个取值为 A_m的 Clifford 数的一个函数 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 出发. 于是有 $b(x) = b_0(x) + b_1(x)e_1 + \cdots + b_m(x)e_m$,将假定 $b_0(x) \geqslant 1$. 若 $m = 1$,A_1同构于复数域,并又回到条件 $\mathrm{Re}\, b(x) \geqslant 1$.

我们要研究的算子通过分布核 $S(x,y)$ 来定义,它在 $A = A_m$ 内取值,算子作用在值域在 A 内的属于 $L_A^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数上. 这个作用由乘积 $S(x,y)f(y)$ 的积分来实现. 而这里的乘积是在 A 的乘法的意义下计算的.

$x = \sum_S \alpha_S e_S$的范数是 $|x|_A + \left[\sum_S |\alpha_S|^2\right]^{1/2}$,将假定限制在 x

$\neq y$ 上时 $S(x,y)$ 满足

$$S(x,y)=b(x)K(x,y)b(y),$$

其中

$$|K(x,y)|_A \leqslant C_0 = |x-y|^{-n}, \tag{15.1}$$

当 $|x'-x| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x',y)-K(x,y)|_A \leqslant C_1|x'-x|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}$, (15.2)

当 $|y'-y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ 时，$|K(x,y')-K(x,y)|_A \leqslant C_1|y'-y|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}$, (15.3)

其分布核 $S(x,y)$ 满足上述条件的算子 T 的 L^2连续性等价于下列三个条件全体：

T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的弱连续性， (15.4)

$T(1)$ 属于 BMO_b， (15.5)

${}^tT(1)$ 属于 BMO_b (15.6)

这个定理的证明可由改写小波 $\tilde{\psi}_\lambda$的构造以适应 Clifford 代数（正如 P. Auscher 在文献 [3] 所作的那样）而得到. 这就得到 $L^2_A(\mathbb{R}^n)$ 的两个无条件基 $\tilde{\psi}_\lambda$和 $\tilde{\psi}^{\#}_{\lambda}$. 第一个基满足 $\tilde{\psi}_\lambda \in V_{j+1}$和 $\int\tilde{\psi}_\lambda(x)f(x)b(x)dx=0$，只要 $\lambda\in\Lambda_j$并且 f 属于 V_j（这里写出来的所有函数均在 A 中取值）. 第二个基满足转置条件：当 $\lambda\neq\lambda'$ 并且 $f\in V_j$ 时，$\int b(x)f(x)\tilde{\psi}^{\#}_{\lambda'}(x)dx=0$，（$f$ 在 A 中取值）. 最后还有当 $\lambda\neq\lambda'$ 时，$\int\tilde{\psi}_\lambda(x)b(x)\tilde{\psi}^{\#}_{\lambda'}(x)dx=0$，当 $\lambda=\lambda'$ 时，$\int\tilde{\psi}_\lambda(x)b(x)\tilde{\psi}^{\#}_{\lambda'}(x)dx=1$. 一旦这些基构造成功，数值函数情形的证明就不难改写得适用于向量情形了.

为把这些考虑应用到双层位势问题，考虑在去掉对角面的 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上由

$$L(x,y)=\frac{(x_1-y_1)e_1+\cdots+(x_n-y_n)e_n-(a(x)-a(y))}{[(x-y)^2+(a(x)-a(y))^2]^{(n+1)/2}}$$

定义的核，其中 $a:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数，而 $L(x,y)$ 在代数 A_n的 Clifford 数的向量空间中取值.

考虑函数

$$b(x) = 1 - \frac{\partial a}{\partial x_1}e_1 - \cdots - \frac{\partial a}{\partial x_n}e_n,$$

并构成反对称核

$$K(x,y) = b(x)L(x,y)b(y).$$

这个核定义一个分布 v. p. $K(x,y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，它在代数 A 内取值，用 T 表示以 v. p. $K(x,y)$ 为分布核的算子，T 显然具有性质 (15.4)，而 T 的 L^2连续性将从等式 $T(1) = 0$ 得到，我们现在就来建立这一等式.

为此，利用等式

$$\begin{aligned}
&\text{v. p.} \int L(x,y)b(y)f(y)dy \\
&= -\int\left\{\frac{1}{n-1}(|x-y|^2 + (a(x)-a(y))^2)^{-\frac{n-1}{2}}\right. \\
&\quad \left. + \sum_1^n \frac{y_j - x_j}{|y-x|^n}e_j\lambda\left(\frac{a(y)-a(x)}{|y-x|}\right)\right\}\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial y_j}e_j dy, \quad (15.7)
\end{aligned}$$

其中 λ 是奇函数，其导数为 $(1+t^2)^{-(n+1)/2}$.

等式 (15.7) 是 Green 公式的一个直接推论，它可写成更浓缩的形式.

$$T = (R_0 + R_1e_1 \cdots + R_ne_n)(e_1\partial_1 + \cdots + e_n\partial_n),$$

其中，R_j的核局部可积. 更精确地说，有

$|R_j(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n+1}$，$|\partial/\partial x_k R_j(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n}$，$|\partial/\partial y_k R_j(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n}$和 $|\partial^2/\partial x_k\partial x_l R_j(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-1}$. 由此推出 $T(1) = 0$ 这一结果.

16. 补　充

建立 $T(b)$ 定理之后，David，Journé 和 Semmes 曾经研究加在

一个给定的函数 $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 上并能推出满足 $T(b)$ 定理假设的所有奇异积分算子的 L^2连续性的尽可能一般的条件是什么.

首先被证明的是条件 $\operatorname{Re} b(x) \geqslant \delta > 0$ 可减弱为 $\inf_Q \frac{1}{|Q|}\left|\int_Q b(x)dx\right| \geqslant \delta > 0$,下确界是对 $\mathbb{R}^n$ 的所有方体取的. 这个新的充分条件好处在于适宜于研究在一条 Lavrentiev 曲线上的 Cauchy 核,该曲线以弧长作参数的参数表示记作 $z(t)$, $-\infty < t < \infty$. 那么 Q 形如$[x,t]$,并且若 $b(t) = z'(t)$,则有 $\frac{1}{t-s}|z(t) - z(s)| \geqslant \delta$. 最后 David、Journé 和 Semmes 发现了对函数 $b(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 所加的必要充分条件,该条件蕴涵满足 $T(b)$ 定理的假设的所有奇异积分算子的 L^2连续性. 这个条件是存在两个常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$,使所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$包含一个体积 $|Q_1| \geqslant \gamma |Q_1|$ 的子方体 Q_1,并且 Q_1满足 $\frac{1}{|Q_1|}\left|\int_{Q_1} b(x)dx\right| \geqslant \delta$ ([97][98]).

Tchamithian 的结构成了十分活跃的研究的出发点,其中的大部分尚未发表.

R. Coifman, P. Jones 和 Semmes 以最简单并且最纯朴的方式修改了 Haar 系 $h_I, I \in \mathscr{I}$,为构造满足 $\int h_I^{\#}(x)b(x)dx = 0$ 的 $h_I^{\#}(x)$,在 I 的左半部上,他们令 $h_I^{\#}(x) = \partial_I$,而在 I 的右半部上,令 $h_I^{\#}(x) = \beta_I$. 并且让 $h_I^{\#}$的支集是 I. 依靠对这些常数的机智的选择,$h_I^{\#}, I \in \mathscr{I}$,是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 Riesz 基,并且可以代替在 $T(b)$ 定理证明中的 Tchamitchian 的基 ([64]).

法文版第3卷　序　言

多重线性分析是走向本卷行将研究的非线性问题的道路之一. 仅当非线性问题呈现全纯结构，使得有一个复杂性增长的多重线性项的分解时，这一道路才是可通行的. 这一方法包含了一个本质性的前题，非线性问题所需要的全纯结构在证明多重线性级数的收敛性后方能建立. A. Calderon 是实践这一方法的先驱者，我们所介绍的一些例子即来源于他的计划. 另一些则属于 T. Kato 和其他发现者，例如 A. McIntosh，Calderon 计划跟 Kato 计划的关系是近年进展的源泉之一.

上述例子的研究中遇到的多重线性算子是 Colderon-Zygmund 算子，其连续性用本书第 2 卷所发展的方法来建立. 小波本身，作为仿积的若干实现的固有函数，重新出现于最后一章，该章讲述 J. M. Bony 的仿微分算子理论.

第12章　广义 Hardy 空间

1. 引　言

设 Γ 是复平面上一条延伸到无穷远点的可度长 Jordan 曲线. 用 $z(s)$ 表示 Γ 的以弧长 s 为参数的参数表示，它满足 $\lim\limits_{S\to\pm\infty}|z(s)|=\infty$，事实上，将假定，若 z_0 不属于 Γ，并且 $1<p<\infty$，就有 $\int_\Gamma \frac{ds}{|z(s)-z_0|^p}<\infty$. 为使记号固定，假定 Γ 定向将是方便的. Jordan 定理告诉我们 Γ 在 $\mathbb{C}$ 中的余集具有两个连通分支 Ω_1 和 Ω_2.

我们研究的对象是广义 Hardy 空间 $H^p(\Omega_1)$，它由在 Ω_1 全纯并在一个十分精确的意义下在 Γ 上有一个属于 $L^p(\Gamma,ds)$ 的迹 $\theta(F)$ 的函数 $F(z)$ 组成. 于是空间 $H^p(\Omega_1)$ 等同于 $L^p(\Gamma)$ 的一个闭子空间. 这个闭子空间仍记作 $H^p(\Omega_1)$，而不必计较记号的混乱. 借助 F 的迹 $f=\theta(F)$，依靠 Cauchy 公式

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{1.1}$$

可重新得到全纯函数 $F:\Omega_1\to\mathbb{C}$. 这里假定了 Ω_1 是在定向的 Γ 的左侧的开集. 其实事情并非如此简单，并且存在着 $H^1(\Omega_1)$ 空间的三种可能的定义. 当 Ω_1 是一个 Smirnov 区域时这些定义一致，而我们知道 Smirnov 区域这个条件不依赖于 $p\in]1,\infty[$.

Calderon 提的问题是要知道，对于 $1<p<\infty$，空间 $L^p(\Gamma)$ 是否是空间 $H^1(\Omega_1)$ 和 $H^p(\Omega_2)$ 的直和，依靠对应的迹算子 θ_1 和 θ_2，后两个空间以 $L^p(\Gamma)$ 的闭子空间作为其实现.

多亏属于 G. David 的一个定理([93]),今天我们知道如何刻画这些曲线 Γ 的特征. 这恰好涉及到在 Ahlfors 意义下的正则曲线;即这样的可度长曲线,对某一个常数 $C>1$,所有 $z_0\in\mathbb{C}$ 和所有 $R>0$,集合 $E(z_0,R)$的测度不超过 CR,这里 $E(z_0,R)$是使 $|z(s)-z_0|\leqslant R$ 的 $s\in\mathbb{R}$ 的集合. 这个条件要求 Γ 不要有"太多的之字形",而比方来说,$|x|^\alpha\sin(1/x)$ 的(可度长的)图象就破坏了这一条件,其中 $1<\alpha<2$.

本章的目的是证明 G. David 的定理. 目前,我们安排两条道路. 一个利用实分析手段,并已在第 9 章中谈到过. 另一个基于复分析,并且提供了 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的连续性的最简单的证明.

G. David 的证明构成了由 D. Burkholder 和 R. Gundy 所引进的方法的一个几何变体,该方法的基础是"好 λ 不等式". 这个方法必须有一个出发点:Lipschitz 曲线上 Cauchy 核的连续性.

因而我们从相应于一个 Lipschitz 开集的 Hardy 空间这一特殊情形开始讨论. 等式 $L^2(\Gamma)=H^2(\Omega_1)+H^2(\Omega_2)$ 将得到三个不同的证明(其中"最简单的证明"是 P. Jones 和 S. Sermmes 所给的). 然后仿效 G. David,用实变量方法证明他的定理. 在证明过程中,我们把由 $T(b)$定理定义的算子代数跟作用在 $L^2(\Gamma)$上的全纯奇异核 $K(z,w)$结合起来.

2. Lipschitz 情形

下面一直设 $\Gamma\subset\mathbb{C}$ 是 Lipschitz 函数 $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的图象. 我们有 $ds=\sqrt{1+a'^2(x)}dx$,并且若 $-M\leqslant a'(x)\leqslant M$,则有 $dx\leqslant ds\leqslant\sqrt{1+M^2}dx$. 从而空间 $L^2(\Gamma,ds)$ 等同于 $L^2(\mathbb{R},dx)$.

用 Ω_1 表示由 $y>a(x)$ 定义的开集,而用 Ω_2 表示由 $y>a(x)$ 定义的开集.

Hardy 空间的定义建立在平行曲线的基础上. 人们注意到,对

所有 $\tau > D$，$\Gamma + i\tau$ 含于 Ω_1 内，这就使下列定义有意义.

定义 1 设 $F(z)$ 是一个在 Ω_1 内全纯的函数，我们说 $F(z) \in H^p(\Omega_1)$，$0 < p < \infty$，如果

$$\sup_{\tau>0}\left[\int_{\Gamma+i\tau}|F(z)|^p ds\right]^{1/p} = \|F\|_{H^p(\Omega_1)} < \infty.$$

还可写成 $\sup_{\tau>0}\left[\int_{\Gamma}|F(z+i\tau)|^p ds\right]^{1/p} < \infty.$

开头先局限于 $1 < p < \infty$ 的情形，我们打算证明下列定理.

定理 1 假定 $1 < p < \infty$. 若 F 属于 $H^p(\Omega_1)$，那么由 $F_\tau(z) = F(z+i\tau)$，$z \in \Gamma$，$\tau > 0$，定义的 $L^p(\Gamma)$ 的函数 F_τ，$\tau>0$ 几乎处处和按 L^p 范数收敛到一个函数，记之为 $\theta(F)$并称之为 F 在 Γ 上的迹.

迹算子 $\theta: H^p(\Omega_1) \to L^p(\Gamma)$ 是 $H^p(\Omega_1)$ 和 $L^p(\Gamma)$ 的一个闭子空间之间的一个同构，该闭子空间仍以 $H^p(\Omega_1)$ 记之.

对所有函数 $f \in L^p(\Gamma; ds)$，下列条件等价

存在一个有理分式函数的序列 $R_j(z)$，$j \geqslant 1$，按 $L^p(\Gamma; ds)$ 范数收敛到 f，该序列在无穷远为零并在 $\overline{\Omega}_1$ 的邻域内全纯.

$$\tag{2.1}$$

对所有 $z \in \Omega_2$，$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$ $\qquad (2.2)$

$f \in H^p(\Omega_1).$ $\qquad (2.3)$

若等价的性质(2.1)，(2.2)或(2.3)中的一个成立，对所有 $z \in \Omega_1$ 有

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ f = \theta(F). \tag{2.4}$$

(2.1)和(2.2)之间的等价性恰好表明 Ω_1 是一个 Smirnov 区

域；当 Γ 是一条任意的可度长 Jordan 曲线时，正如 Lavrentiev 所指出的([155])，(2.2)不蕴涵(2.1).

定理 1 的深刻含意在于它是一种形式的"最大模原理".

如果我们预先知道 $F(z)$ 属于 $H^p(\Omega_1)$，但不知如何计算 $F(z)$ 在 $H^p(\Omega_1)$ 内的范数，那么可能满足于以 $\left[\int_\Gamma |F(z)|^p ds\right]^{1/p}$ 来估计这个范数. 不过如果没有提供预先的(知道 F 属于 $H^p(\Omega_1)$ 这一)信息，那么这种推断的方式是错误的. 经典的反例是 $\Omega_1 = \{y > 0\}$ 和 $F(z) = \exp(-iz)(y+i)^{-1}$，其边值属于 $L^2(\mathbb{R})$，但 F 不属于 $H^2(\Omega_1)$.

在本节和后面的推理中的一大部分都是不得不为克服这一困难而作的.

定理 1 的证明基于下列引理提供的(2.4)的一个逼近形式. 其中为简单计，把 Ω_1 记成 Ω .

引理 1 若 $F(z)$ 属于 $H^p(\Omega)$，那么对所有 $\tau>0$ 和所有 $z_0 = x_0 + ia(x_0) + i\sigma \in \Omega$ 有

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\tau}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta \qquad 若\ \sigma > \tau. \tag{2.5}$$

和

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\tau}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta \qquad 若\ \sigma < \tau. \tag{2.6}$$

为建立这两个等式，把它们纳入通常的 Cauchy 公式，其中的 Γ_τ 代以由 $-R \leqslant x \leqslant R$ 和 $a(x)+\tau \leqslant y \leqslant a(x)+\tau'$ 定义的曲边梯形的有两边界. 再令 R 和 τ' 趋于无穷.

在上边界上的积分直接放大为

$$\int_\Gamma \frac{|F(z+i\tau')|}{|z+i\tau'-z_0|}ds \leqslant \left[\int_\Gamma |F(z+i\tau')|^p ds\right]^{1/p}\varepsilon(\tau'),$$

其中
$$\varepsilon(\tau') = \left[\int_\Gamma |z+i\tau'-z_0|^{-q}ds\right]^{1/q}$$

当 τ' 趋于无穷时趋向于 0.

在垂直边上的积分用 Titschmarch 书中所介绍的技术处理，我们回顾一下这一技术."振动"垂直边界，令 R 跑遍区间$[M,M+1]$，取所用的 Cauchy 公式的均值，就把在垂直边界上的单积分换成了重积分，再利用 $H^p(\Omega)$的定义从上估计这一重积分，请读者参阅[229].

(2.6)的证明也是这样，留给读者.

我们将系统利用的第二个材料是下列知识.

引理 2 设 $K_\tau(z,w), z\in\Gamma, w\in\Gamma$, 是一个满足

$$|K_\tau(z,w)|\leqslant C\frac{\tau}{|z-w|^2+\tau^2} \text{ 和} \int_\Gamma K_\tau(z,w)dw=1$$

的函数，则对所有的函数 $f\in L^p(\Gamma)$ 有

$$\left|\int_\Gamma K_\tau(z,w)f(w)dw\right|\leqslant C'f^*(z), \tag{2.7}$$

这里 $f^*(z)$是 f 的 Hardy 和 Littlewood 的极大函数，并有

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\int K_\tau(z,w)f(w)dw=f(z), \tag{2.8}$$

其中极限是在 $L^p(\Omega)$范数意义下以及 Γ 上几乎处处的意义下取的.

这里的证明跟在第 7 章给的引理 5 的证明一样.

这个引理将应用到核

$$K_\tau(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z-w-i\tau}-\frac{1}{z-w+i\tau}\right].$$

容易验证 $K_\tau(z,w)$满足引理中所叙述的条件.

我们回到 Hardy 空间的研究.

考虑序列 $F(z+im^{-1}), m\geqslant 1, z\in\Gamma$. 由于这个序列在$L^p(\Gamma)$中有界，可从它抽出一个在拓扑 $\sigma(L^p,L^q)$的意义收敛到 $f\in L^p(\Gamma)$的子序列，其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

由于对所有 $z_0 \notin \Gamma$，$\frac{1}{z-z_0}$ 属于 $L^q(\Gamma)$，可在对 $\tau=\frac{1}{m_j}$ 写出的(2.4)和(2.5)中过渡到极限，遂得

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \qquad \text{若 } z_0\in\Omega.$$

和

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \qquad \text{若 } z_0\notin\overline{\Omega}.$$

含 $z_0=x_0+ia(x_0)\pm i\tau,\tau>0$，并把这两个等式逐端相减，(在改变一下记号之后)即得

$$F(z)=\int_\Gamma K_\tau(z,w)f(w)dw,z\in\Omega. \tag{2.9}$$

只需应用引理 2 便可得知迹算子 $\theta:H^p(\Omega)\to L^p(\Omega)$ 的存在性，从而有 $f=\theta(F)$.

等式(2.9)结合 Hardy 和 Littlewood 关于极大函数的定理对所有 $F\in H^p(\Omega)$ 提供估计

$$\|\sup_{\tau>0}|F(z+i\tau)|\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant C(M,p)\|\theta(F)\|_{L^p(\Gamma)}. \tag{2.10}$$

F 在 $H^p(\Omega)$ 中的范数等价于其迹 $\theta(F)$ 在 L^p 的范数，换句话说，$H^p(\Omega)$ 等同于 $L^p(\Gamma)$ 的一个子空间.

在继续讨论之前，先在下列引理上暂停一下.

引理 3 若 F 属于 $H^p(\Omega)$，G 属于 $H^q(\Omega)$，$1/p+1/q=1$，$1<p<\infty$，则

$$\int_\Gamma F(z)G(z)dz=0. \tag{2.11}$$

以下我们总把 $\theta(F)$ 写成 F，只要对应的积分清楚地是在 Γ 上计算的.

为证明(2.11)，作为在 $\Gamma_\tau(\tau>0)$ 上的相应积分的极限，我们来计算(2.11)中的积分. 因而只需证明 $\int_{\Gamma_\tau}F(z)G(z)dz=0$. 进而注意到 $\int_{\Gamma_\tau}F(z)G(z)$ 不依赖于 $\tau>0$；积分迴路的变形跟引理 1 证

明中所用的一样. 又有 $\lim_{\tau\to\infty}\left[\int_{\Gamma_\tau}|F(z)|^p ds\right]^{1/p}=0$. 事实上,若 z 属于 Γ, $|F(z+i\tau)|\leqslant cF^*(z)\in L^p(\Gamma)$, 这就允许应用 Lebesgue 控制收敛定理.

从而得到 $\lim_{\tau\to\infty}\int_{\Gamma_\tau}F(z)G(z)dz=0$.

现在回到定理 1 的证明,并用 $\mathscr{R}(\Omega)$ 表示在无穷远为零,其极点不属于 $\overline{\Omega}$ 的有理分式在 Ω 上的限制的代数.

为刻画 $\mathscr{R}(\Omega)$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中的闭包的特征,我们利用 Hahn-Banach 定理,设 $g\in L^q(\Gamma)$ 是这样一个函数,对所有 $f\in\mathscr{R}(\Omega)$ 有 $\int_\Gamma g(z)f(z)dz=0$. 由于 $dz=z'(s)ds$ 并且 $|z'(s)|=1$, 可用 $(z'(s))^{-1}g(z)=h(z)$ 代替 $g(z)$, 而改写为对 $f\in\mathscr{R}(\Omega)$ 有 $\int_\Gamma h(z)f(z)dz=0$.

特别地,若 $z_0\notin\overline{\Omega}$, 则 $\int_\Gamma h(z)(z-z_0)^{-1}dz=0$. 于是可令

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{h(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-z^*}\right]h(w)dw,$$

其中 $z=u+ia(u)+iv\in\Omega$, 而 $z^*=u+ia(u)-iv\notin\overline{\Omega}$.
再次应用引理 2 即得

$$\sup\{|H(z)|;\operatorname{Re}z=u,z\in\Omega\}\leqslant Ch^*(u+ia(u))\in L^q(\Gamma).$$

遂有 $H(z)$ 属于 $H^q(\Omega)$.

我们尚未结束证明,因为还要验证对 $f\in H^p(\Omega)$ 有 $\int_\Gamma h(z)f(z)=0$. 但这由引理 3 保证. 我们还顺便证明了 $H^p(\Omega)$ 的特征刻画.

能够获得一个充分条件,允许仅考察一个全纯函数在 Ω 的边界上的迹就能验证它属于 $H^p(\Omega)$, 那将是令人满意的.

一个熟知的反例是: $\Gamma=\mathbb{R}$, $F(z)=(z+i)^{-1}e^{-iz}$, 这个函数在 $\operatorname{Im}z>0$ 内全纯,在 $\operatorname{Im}z\geqslant 0$ 上连续,并且在普通的意义下在实轴上具有迹. 此外这个迹是函数 $F(x+i\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, 当 ε 趋向于 0 时

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的极限. 但 $F(z)$ 不属于 $H^2(\Omega)$，这是由于 $F(x+i\tau) = e^{\tau}(x+i\tau+i)^{-1}\exp(-ix)$，而这个 x 的函数的 L^2 范数取值 $\sqrt{\pi}\, e^{\tau}(\tau+1)^{-1/2}$；它随 τ 趋向于无穷.

不过还是有下列结果.

引理 4 设 $F(z)$ 是一个在 Ω 内全纯并且有界的函数. 那么 F 在 $\Gamma=\partial\Omega$ 上有一个迹：$\lim\limits_{\tau\to 0} F(z+i\tau)$ 对几乎所有的 $z\in\Gamma$ 上存在. 如果这个迹属于 $L^p(\Gamma)$，那么 $F(z)$ 属于 $H^p(\Omega)$.

为证明这个引理，首先用 $F_\varepsilon(z)=(1-i\varepsilon z)^{-1}F(z)$ 代替 $F(z)$，由于 F 在 Ω 内有界 $F_\varepsilon(z)$ 属于 $H^p(\Omega)$，当 ε 趋于 0 时，$F_\varepsilon(z)$ 的范数趋于无穷. $F_\varepsilon(z)$ 的迹存在，这就保证第一个结论成立，定理 1 提供估计

$$\left(\int_{\Gamma_\tau}|F_\varepsilon(z)|^p ds\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int_{\Gamma}|F_\varepsilon(z)|^p ds\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int_{\Gamma}|F(z)|^p ds\right)^{1/p} \tag{2.12}$$

剩下的事情只是令 ε 趋于 0，以便得到所要的结论.

我们要介绍的空间 H^p 的最后一个定义要用到保形表示. 这个定义的价值在于把 H^p 推广到了带可度长边界的区域.

3. Hardy 空间和保形表示

设 Ω 是复平面上的一个有界、单连通的开集. 于是存在一个保形表示 $\Phi: D\to\Omega$，这里 D 是开单位圆盘. 此外，若 Ω 是一个 Jordan 区域(即若 Ω 是一条封闭 Jordan 曲线的余集中的有界连通分支)，那么 Φ 可扩张为从 $\overline{D}$ 到 $\overline{\Omega}$ 上的一个同胚. 若 $|z_0|=1, z_1\in\Gamma$，可以要求 Φ 满足条件 $\Phi(z_0)=z_1$.

把 Φ 跟两个适当的保形变换复合，可以得到开半平面 $P=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im} z>0\}$ 到开集 Ω 上的一个保形表示，这里 Ω 由一条过

无穷远点的定向 Jordan 曲线 Γ 界定. 这个保形表示仍记作 Φ，它可扩张为从 $\mathbb{R}$ 到 Γ 上的一个同胚. 还有，如果 Ω 是位于定向的 Γ 的"左侧"的开集，这个同胚是递增的.

设 $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数(因而有 $\| a' \|_\infty \leqslant M < \infty$). 用 Γ 表示 a 的图象，从左到右定向. 又设 $\Omega = \{(x,y); y > a(x)\}$ 是 Γ"上方"的开集(即定向的 Γ 的左侧).

设 Σ 是复平面上由 $x \geqslant 0, |y| \leqslant Mx$ 定义的角形区域.

属于 A. P. Calderon 并由 C. Kenig 加以补充的下列定理告诉我们，对所有 $y > 0$，曲线 $\Phi(x + iy), x \in \mathbb{R}$，是斜率不超过 M 的 Lipschitz 函数的图象.

更精确地说，沿用前述记号，下列结果成立.

定理 2 可以选择 $\log \Phi'(z)$ 的一个全纯分支使得对所有 $z \in P$，$|\mathrm{Im} \log \Phi'(z)| \leqslant \theta_0 = \mathrm{Arctg}\, M$.

为证明定理 2，先来处理 Γ 是一条折线的情形，其两端各是斜率不超过 M 的 1 条半直线. 那么 Φ 的共形表示由 Schwarz-Christoffel 公式提供([211]). 可以找到 N 个实数 $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$(N 是 Γ 的顶点的数目)，一个实数 γ 和 N 个实指数 $\gamma_j, 1 \leqslant j \leqslant N$，使 $\Phi'(z) = e^{i\gamma} \prod_1^N (z - c_j)^{\gamma_j}$. 我们约定 $z^\gamma (\gamma \in \mathbb{R})$ 是由 $1^\gamma = 1$ 确定的在 P 内的全纯分支. "角度"γ 和 γ_j 与折线 Γ 的斜率相联系；事实上，若 $c_j \leqslant x \leqslant c_{j+1}$，则有 $\arg \Phi'(x) = \gamma + \pi(\gamma_{j+1} + \cdots + \gamma_N)$，若 $x < c_1$，则有 $\arg \Phi'(x) = \gamma + \pi(\gamma_1 + \cdots + \gamma_N)$，而若 $x > c_N$，则有 $\arg \Phi'(x) = \gamma$. 于是有

$$|\gamma_1 + \cdots + \gamma_N| \leqslant 2\theta_0/\pi = \gamma < 1.$$

由此得到在无穷远 $|\Phi'(z)| = O(|z|^\gamma)$，并且若 $z = u + iv, v > 0$，则有

$$\Phi'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(x - u)^2 + v^2} \Phi'(x) dx. \qquad (3.1)$$

复数 $\Phi'(x)$ 属于 $\sum$（由构造）. 由于 $\sum$ 是一个凸的角形区域，并且 $\Phi'(z)$ 是 $\Phi'(x)$ 的凸线性组合，故 $\Phi'(z)$ 属于 $\sum$.

把函数 log（定义在 $\sum$ 的角形邻域内）和 $\Phi'(z)$ 复合即得定理 2 的结论.

用一个折线序列 Γ_j 逼近 Γ 可以过渡到一般情形，Γ_j 上方的开集 Ω_j 递增趋向于 Ω. 为此只需 Γ_j 是分片仿射函数 $a_j(x)$ 的图象，$a_j(x)$ 组成一个递减函数序列并以 $a(x)$ 作为极限.

为构造 $a_j(x)$，考虑分点 $x = k2^{-j}, k \in \mathbb{Z}$, $|k| \leqslant j2^j$. 令 $y(k,j) = \alpha(k2^{-j}) + 2Mz^{-j}$，并用 Γ_j 表示顶点为 $(k2^{-j}, y(k,j))$ 的折线，其首尾分别是斜率为 $-M$ 和 M 的半直线.

直接验证即知函数 $a_j(x)$ 形成一个在所有紧集上一致收敛到 $a(x)$ 的递减序列.

为建立共形表示 Φ_j 到 Φ 的收敛性，可返回到 P 代以开单位圆 D 而 Ω 代以有界开集的情形. 这要利用下列注释（它由 Schwarz 引理推出）.

引理 5 设 D 是开单位圆盘，Ω 是一个单连通有界开集，而 Ω_j 是一个单连通开集的递增序列，使 $\Omega = \bigcup_{j \geqslant 0} \Omega_j$.

固定 $z_0 \in \Omega_0$，设 $\Phi_j: D \to \Omega_j$ 是由 $\Phi_j(0) = z_0$ 和 $\Phi_j'(0) > 0$ 规范化的共形表示.

则序列 $\Phi_j'(0)$ 是递增的，并且在 D 的所有紧集上 $\Phi_j(z)$ 一致收敛到由 $\Phi(0) = z_0$ 和 $\Phi'(0) > 0$ 规范化的共形表示 $\Phi: D \to \Omega$.

回到 P 和 Ω 的情形. 我们有 $\Phi_j'(z) \in \sum$，从而推出 $\Phi'(z) \in \sum$.

定理 2 提供 $\log \Phi'(z) = u(z) + iv(z)$，其中 $\sup\limits_{z \in P} |v(z)| \leqslant \theta_0 < \pi/2$. 函数 $v(z)$ 在 P 内是调和的，而 $v\left(i\dfrac{1-z}{1+z}\right)$ 在单位圆盘 $|z| <$

1 内也是调和的. 然后利用下列引理.

引理 6 设 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 是一个在 $|z|<1$ 内全纯的函数. 假定 $\sup\limits_{|z|<1}|v(z)|<\infty$, 则有

$$f(z)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}v(e^{i\theta})d\theta+C,$$

其中 C 是一个实常数.

证明是简单的. 熟知一个有界全纯函数是其边值的 Poisson 积分. 于是有

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}v(e^{i\theta})d\theta.$$

令
$$g(z)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}v(e^{i\theta})d\theta,$$

由表达式得 $\operatorname{Im} g(z)=v(z)$. 又 $g(z)$ 显然在 $|z|<1$ 内全纯. 函数 $g(z)-f(z)$ 在 $|z|<1$ 内全纯并且是实的, 因而这是一个常数.

回到半平面情形, 由上推出存在 $v(x)$, 它满足 $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant\theta_0<\pi/2$, 并且对 $z=x+iy$

$$v(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)dt. \tag{3.2}$$

最后还有

$$\log\Phi'(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t-y}-\frac{t}{t^2+1}\right]v(t)\,dt+C. \tag{3.3}$$

这里 C 是一个实常数.

反之从一个实函数 $v\in L^\infty(\mathbb{R})$ 出发, 它满足 $\|v\|_\infty<\pi/2$, 令 $F(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{t}{t^2+1}\right]v(t)dt$. 问题是要知道若由 $\Phi'(z)=\exp F(z)$ 定义 Φ, 是否能得到一个共形表示 $\Phi: P\to\Omega$, 而 Ω 是一个 Lipschitz 图象 Γ 上方的开集. 为处理这一问题, 要利用下列形式下的 Rouché 定理. 假定一个函数 $U(z)$ 在开圆盘 $|z|<1$ 内全纯, 在闭圆盘 $|z|\leqslant 1$ 内连续, 并且 $U(e^{i\theta}), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 是一条闭

Jordan 曲线 Γ 的一个参数表示，那么 $U(z)$ 是从 D 到 Γ 的内部 Ω 上的一个共形表示.

Rouché 定理显然可推广到 D 代以上半平面 P 的情形. 于是作下列两个假设：$\Phi(x)$，$-\infty < x < \infty$，应当是一条 Jordan 曲线 Γ 的参数表示，并且应当有 $\lim\limits_{|z|\to\infty} |\Phi(z)| = \infty$.

回到我们的问题. 要利用一个到极限的过渡，其中 v 用一个序列 $v_j, j \in \mathbb{N}$，逼近 v_j 是阶梯函数，有紧支集，并且满足 $\| v_j \|_\infty \leqslant \| v \|_\infty$. 先处理 v_j 的情形，省去指标 j，不过写出的估计应当关于 j 是一致的.

在每个区间 $[a_k, a_{k+1}[$ 上，$v(t) = \theta_k$，$|\theta_k| < \pi/2$，同时有 $\log \Phi'(t) = u(t) + i\theta_k$，又以 $\Phi(t)$ 作为一个参数表示的曲线 Γ 是一个 Lipschitz 图象，这时它是一条仅有有限条边的折线，首尾两边是两条半直线. 应用 Rouché 定理即知 Φ 是由 Schwarz-Christoffel 公式([211]) 给出的共形表示. 特别地有

$$\Phi'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \Phi'(t) dt. \tag{3.4}$$

由于角形区域 $\sum$ 是凸的，故有

$$\Phi'(z) \in \sum, \text{对所有 } z \in P. \tag{3.5}$$

仿照属于 A. P. Calderon 的一个推理([38])，我们来证明 $\omega(t) = |\Phi'(t)|$ 满足 Muckenhoupt 的 A_2 条件，相关常数不依赖于 j. 首先注意 $G(z) = 1/\Phi'(z)$ 同样满足

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} G(t) dt \tag{3.6}$$

事实上，把 Φ' 换成 $1/\Phi'$ 相当在(3.3) 中把 v 换成 $-v$，于是有 $G(z) \in \sum$，并且

$$\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} |\Phi'(t)| dt\right]$$
$$\times \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} |\Phi'(t)|^{1} dt\right]$$

$$\leqslant (1 + M^2)(\mathrm{Re}\, \Phi'(z))(\mathrm{Re}\, 1/\Phi'(z))$$
$$\leqslant (1 + M^2)^2 |\Phi'(z)| |\Phi'(z)|^{-1} = (1 + M^2)^2.$$

再来考虑区间 $I = [x - y, x + y]$，注意在这个区间上 $\frac{y}{(x-y)^2 + y^2} \geqslant \frac{1}{2y}$. 由此最后得到 $|\Phi'|$ 和 $1/|\Phi'|$ 在 I 上均值的乘积一致有界. 这表明 $\omega(t) = |\Phi'(t)|$ 属于 Muckenhoupt 的 A_2 类；出现在这个类的定义中的常数仅依赖于 M.

于是有

$$\sup_I \left[\frac{1}{|I|}\int_I \omega(t) d\tau\right]\left[\frac{1}{|I|}\int_I \frac{dt}{\omega(t)}\right] \leqslant C(M) < \infty. \quad (3.7)$$

由此得知(第 7 章，第 8 节)存在一个指数 $\delta = \delta(M) > 0, \delta \leqslant 1$，和一个常数 $C'(M)$ 使

$$\frac{\omega(E)}{\omega(I)} \leqslant C\left(\frac{|E|}{|I|}\right)^{\delta} \quad (3.8)$$

(其中 $\omega(E) = \int_E \omega(t) dt \cdots$).

把(3.8) 中的 ω 换成 $1/\omega$，并考虑到 $\left[\int_E \omega(t) d\tau\right]\left[\int_E \frac{dt}{\omega(t)}\right] \geqslant |E|^2$，即得

$$\frac{\omega(\mathrm{E})}{\omega(I)} \geqslant C'\left(\frac{|E|}{|I|}\right)^{2-\delta}. \quad (3.9)$$

对 $E = [0,1], I = [0,t] (t \geqslant 1)$ 或 $E = [-1,0], I = [t,0]$，$t \leqslant -1$，应用(3.8) 或(3.9)，即得

$$C_1(M)|t|^{\delta} \leqslant |\Phi(t)| \leqslant C_2(M)|t|^{2-\delta}, \text{若 } \Phi(0) = 0. \quad (3.10)$$

若 $0 < h < 1$，还有

$$|\Phi(t + h) - \Phi(t)| \geqslant C_3(M) h^{2-\delta}(1 + |t|)^{-2+2\delta}, \quad (3.11)$$

其中 $C_1(M) > 0, C_2(M) > 0$ 和 $C_3(M) > 0$ 仅依赖于 M. 最后还有，当 $0 < h < 1$ 时

$$|\Phi(t + h) - \Phi(t)| \leqslant C_4(M) h^{\delta}(1 + |t|)^{2-2\delta}. \quad (3.12)$$

为建立这些估计，我们写出不等式

$$\left|\int_a^b \Phi'(t)dt\right| \geqslant \int_a^b \mathrm{Re}\, \Phi'(t)dt \geqslant (1+M^2)^{-1/2}\int_a^b |\Phi'(t)|dt,$$

有了这个注释，上述估计的推导是直接的.

我们已经为过渡到极限准备好了工具. 从一个满足 $\|v\|_\infty = \theta_0 < \pi/2$ 的实可测函数 $v(t)$ 出发. 作一个紧支阶梯函数序列 v_j，它满足 $\|v_j\|_\infty \leqslant \theta_0$ 和几乎处处 $v_j(t) \to v(t)$.

再逐步设置以下条件以构造 $\Phi_j: P \to \mathbb{C}$.

$$\log \Phi'_j(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} v_j(t)dt + C_j, C_j \in \mathbb{R}, z \in P,$$

$$\mathrm{Re}\log \Phi'_j(i) = 0 \text{ 和 } \Phi_j(0) = 0.$$

函数 Φ_j 在 P 内是单叶的，并且它关于 j 一致满足估计(3.10)至(3.12).

为得到结论，我们(在经过两个适当的射影变换之后)利用下列引理.

引理 7 设 $F_j, j \in \mathbb{N}$，是一个在 $|z| < 1$ 内单叶在 $|z| \leqslant 1$ 内连续并且在 $|z| \leqslant 1$ 内一致收敛到 F 的函数序列. 假定 $F_j(e^{i\theta}), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，和 $F(e^{i\theta})$ 是封闭 Jordan 曲线，记为 Γ_j 和 Γ. 则 F 是单叶的，并且 $F(D)$ 是 Γ 的 内部.

这一引理是 Rouché 定理的一个变体.

为归结到这一引理，首先考虑辅助函数 $(i + \Phi_j(z))^{-1}$. 由于 $\Gamma_j = \Phi_j(\mathbb{R})$ 是一条通过 0 并且斜率不超过 M 的折线，我们有 $|i + \Phi_j(t)| \geqslant c(M)(1 + |\Phi_j(t)|) \geqslant c'(M)(1 + |t|)^\delta$，从而 $|(i + \Phi_j(t))^{-1}| \leqslant 1/c'(M)(1 + |t|)^{-\delta}$. 另外，函数 $\Phi_j(t)$ 是等度连续的；过渡到一个子序列(为不使书写复杂化，我们省掉子序列记号)，可以假定在所有紧集上，函数 $\Phi_j(t)$ 一致收敛. 于是得到$(i + \Phi_j(t))^{-1}$ 在整个直线上一致收敛. 最大模原理推出函数$(i + \Phi_j(z))^{-1}$ 在 p 内一致收敛. 为了归结到引理所描述的情形，只需令

$z = i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \zeta \in D.$

我们刚刚证明了下列定理.

定理 3 设$v(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$是一个实值函数,满足 $\|v\|_\infty = \theta_0 < \pi/2$, 由

$$\log \Phi'(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right] v(t)dt$$

定义的全纯函数提供了从半平面到开集 Ω 上的一个共形表示,这里 Ω 是一个 Lipschitz 图象 Γ 上方的开集,该曲线斜率不超过 $\mathrm{tg}\ \theta_0$.

我们顺便得到了下列性质.

边界值 $\log \Phi'(t)$, $-\infty < t < \infty$, 几乎处处存在,并且 $|\Phi'(t)|$是出现在 Muckenhoupt 的 A_2 类中的一个数. Lipschitz 图形Γ用$z = \Phi(t)$, $-\infty < t < \infty$,参数表示,因而$ds = |\Phi'(t)|dt$. 对应$t \to s$是一个保持零测集的同胚.

返回到相应于 Lipschitz 开集的 Hardy 空间. 用 $a(x)$表示一个单实变量,取实值的 Lipschitz 函数. 我们有 $\|a'\|_\infty \leqslant M < \infty$, 把 $a(x)$ 的图象 Γ 上方的开集记作 Ω. 设 $\Phi: P \to \Omega$ 是一个共形表示,把它扩张为从$\mathbb{R}$到 Γ 上的递增同胚.

设 $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 是一个在无穷远为零的有理分式,其极点不属于$\overline{\Omega}$,那么$c_1 = (F \circ \Phi)\Phi'^{1/p}$属于 Hardy 空间 $H^p(P)$. 为证实之,应计算 $\sup\limits_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|c_1(x+iy)|^p dx$.

进行变量替换$z(t) = \Phi(x+iy)$,并设$\Gamma_y \subset \Omega$是由这个参数表示定义的曲线. 我们知道Γ_y是一个 Lipschitz 图象,其斜率不超过M. 由此得知 $\int_{\Gamma_y}\frac{|P(z)|^p}{|Q(z)|^p}ds$ 不超过一个不依赖于 y 的常数.

上述事实验证以后,就可由

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}|G(t)|^p dt\right]^{1/p} = \left[\int_\Gamma |F(z)|^p ds\right]^{1/p}$$

计算 G 在 H^p 内的范数.

F 对应于 G 的映射是一个同构，因而能扩张为 $H^p(\Omega)$ 和 $H^p(P)$ 的一个闭子空间之间的一个同构.

为了证明这个闭子空间就是整个 $H^p(P)$，采用对偶方法. 设 $g(x) \in L^q(\mathbb{R};dx)$ 是一个满足下列条件的函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}(F\circ\Phi)\Phi'^{1/p}g(x)dx = 0, F \in H^p(\Omega). \qquad (3.13)$$

那么化成在 Γ 上的积分，(3.13) 就写成了 $\int_\Gamma F(z)h(z)dz = 0$，其中 h 满足条件 $(h\circ\Phi)\Phi' = \Phi'^{1/p}g(x)$，或 $(h\circ\Phi)\Phi'^{1/q} = g(x)$. 定理 1 告诉我们 $h(z)$ 属于 $H^q(P)$. 由我们推理的前面那部分知 $g(x)$ 属于 $H^q(\Omega)$，由此即得函数 $(F\circ\Phi)\Phi'^{1/p}$ 在 $H^p(P)$ 中的稠密性.

我们方才建立了下列结果.

定理 4 设 $\Phi: P \to \Omega$ 是从上半平面到一条 Lipschitz 图象上方的开集 Ω 的如上规范化的共形表示，则对 $1 < p < \infty$ $F \to (F\circ\Phi)\Phi'^{1/p}$ 是 $H^p(\Omega_1)$ 和 $H^p(P)$ 之间的一个同构，这里 $H^p(\Omega_1)$ 视作 $L^p(\Gamma)$ 的一个闭子空间.

我们要研究 $p=1$ 和 $p=\infty$ 这两个极限情形，对此补充上述结论.

若 $p=1$，定理 1 证明中所用的推理失效.

我们回顾一下，F 属于 $H^1(\Omega_1)$，如果 F 在 Ω_1 内是全纯的，并且存在一个常数 C，使 $\sup\limits_{y>0}\int_\Gamma |F(z+iy)|ds \geqslant C$.

若 F 属于 $H^1(\Omega_1)$，含 $F_m(z) = F(z+i/m)$，$m > 1$，那么这些函数 F_m 属于 $H^1(\Omega)$. 另外它们在 Γ 上有一个明显的迹，并且若 z

属于 Ω 或 Γ

$$F_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma-i/2m}\frac{F_m(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

仿照对定理 1 的相应断言所作的证明，即可建立这一事实. 由这个关系推断出 $F_m \in H^\infty(\Omega)$；F_m 的 L^∞ 范数显然不是有界的. 令 $f_m(z) = (F_m \circ \Phi)\Phi'$，它在 P 内是全纯的，再对 $\varepsilon > 0$，令

$$f_{m,\varepsilon}(z) = (F_m \circ \Phi)\Phi'(1 + \varepsilon\Phi')^{-1}(1 - i\varepsilon z)^{-2}.$$

由于 $\Phi'(z) \in \sum$，故有 $\left|\frac{\Phi'}{1 + \varepsilon\Phi'}\right| \leqslant \frac{C}{\tau}$，并由此得到 $|f_{m,\varepsilon}(z)| \leqslant C(m,\varepsilon)|1 - i\varepsilon z|^{-2}$. 从而有 $f_{m,\varepsilon}(z) \in H^1(P)$，$H^1(P)$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 的一个闭子空间. 而 $(F_m \circ \Phi)\Phi'$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$ 并且 $|(1 + \varepsilon\Phi')^{-1}(1 - i\varepsilon z)^{-2}| \leqslant 1$.

Lebesgue 控制收敛定理随即给出 $(F_m \circ \Phi)\Phi' \in H^1(P)$.

到了这一步，便可利用一个古典结果([239]，第 7 章的定理 7.22)，即 $H^1(P)$ 的一个函数表示成 $H^2(\Omega)$ 的两个函数的乘积的因子分解. 从而有 $(F_m \circ \Phi)\Phi' = g_m h_m$，这里 g_m 和 h_m 属于 $H^2(P)$，并且 $\| g_m \|_2^2 = \| h_m \|_2^2 = \| (F_m \circ \Phi)\Phi' \|_1 = \int_\Gamma |\Gamma_m(z)|\,ds$.

再由 $(G_m \circ \Phi)\Phi'^{1/2} = g_m$ 和 $(H_m \circ \Phi)\Phi'^{1/2} = h_m$ 定义 G_m 和 H_m. 遂有 $F_m = G_m H_m$，以及 $G_m \in H^2(\Omega_1)$，$H_m \in H^2(\Omega_1)$，$\int_\Gamma |G_m(z)|^2 ds = \int_\Gamma |H_m(z)|^2 ds = \int_\Gamma |F_m(z)|\,ds$.

不等式(2.10) 告诉我们，若令 $G_m^*(z) = \sup_{\tau>0}|G_m(z + i\tau)|$，$z \in \Gamma$，则有 $\| G_m^* \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \| G_m \|_{L^2(\Gamma)}$.

这就给出 $\| F_m^* \|_{L^1(\Gamma)} \leqslant C \| F_m \|_{L^1(\Gamma)}$. 一方面 $\| F_m \|_{L^1(\Gamma)} \leqslant \| F \|_{H^1(\Omega_1)}$，另一方面 $F_m^*(z) = \sup_{\tau\geqslant 1/m} |F(z + i\tau)|$ 递增收敛到 $F^*(z) = \sup_{\tau>0} |F(z + i\tau)|$. 这么一来，定理 1 的所有结论不难推广到 $p = 1$.

$p = \infty$ 的情形没什么意义，因为令 $F \in H^\infty(\Omega_1)$ 对应 $F \circ \Phi \in H^\infty(P)$ 的映射显然是一个等距同构.

4. 与复分析联系的算子

仍用 Γ 表示一个 Lipschitz 图象，同 Ω_1 表示 Γ 上方的开集. 下面所说的一切，作了显然的改变之后，均可适用于 Ω_1 代以 Γ 下方的开集 Ω_2 的情形.

令 $M = \| a' \|_\infty$（Γ 是 a 的图象），并用 S 表示区域 $y \geqslant M'|x|$，这里 $M' > M$. 考虑两个复变量 z 和 w 的一个在由 $w - z \notin S$ 定义的开集 $W \subset \mathbb{C}^2$ 内全纯的函数 $K(z,w)$，假定 K 满足

$$|K(z,w)| \leqslant C\ |z - w|^{-1} \qquad \text{当 } w - z \notin S \text{ 时.} \tag{4.1}$$

定理 4 在前述假定下，对所有函数 $f \in L^2(\Gamma;ds)$，由 $F(z) = \int_\Gamma K(z,w)f(w)dw$ 定义的函数 $F:\Omega_1 \to \mathbb{C}$ 属于 $H^2(\Omega_1)$.

$F(z)$ 在 Ω_1 有定义并在 Ω_1 调和这一事实从几何假设和 Cauchy-Schwarz 不等式得到. 另一个注释是：若 $F(z)$ 在由 $y < M|x|$ 定义的开集内全纯并在 $y < M'|x|$ 上满足 $|F(z)| \leqslant C'|z|^{-1}$，只要 $M' < M$，那么导数 $F'(z)$ 当 $y < M'|x|$ 和 $M' < M$ 时满足 $|F'(z)| \leqslant C''|z|^{-2}$. 在一个中心为 z 半径是 z 到 $y = M|x|$ 的距离之半的圆上应用 Cauchy 公式即可确信这一事实.

回到 $K(z,w)$ 即知若 $w - z \notin S''$，S'' 是区域 $y \geqslant M''|x|$，而 $M < M'' < M'$，则

$$|\partial K/\partial z| + |\partial K/\partial w| \leqslant C''|z - w|^2. \tag{4.2}$$

自然若用 M'' 代替 M'，可假定(4.1)和(4.2)当 $w - z \notin S$ 时都成立，以下即如此假定.

为了证明定理，重要的是要建立由

$$F_\tau(z) = \int_\Gamma K(z + i\tau, w)f(w)dw \tag{4.3}$$

$(\tau > 0)$ 定义的函数 F_τ 对 $\tau > 0$ 一致满足

$$\left(\int_\Gamma |F_\tau(z)|^2 ds\right)^{1/2} \leqslant C\left(\int_\Gamma |f(z)|^2 ds\right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

事实上,(4.4)左端的上确界是 F 在 $H^2(\Omega_1)$ 内的范数. 为建立(4.4),只需简单地对核 $K_\tau(z,w) = K(z + i\tau, w)$ 利用 $T(b)$ 定理. 为此应该证明存在一个常数 C,使得对所有区间 $I \subset \Gamma$ 有

$$\int_I \left| \int_I K_\tau(z,w) dw \right| ds \leqslant C|I| \tag{4.5}$$

和

$$\int_I \left| \int_I K_\tau(z,w) dz \right| ds \leqslant C|I|. \tag{4.6}$$

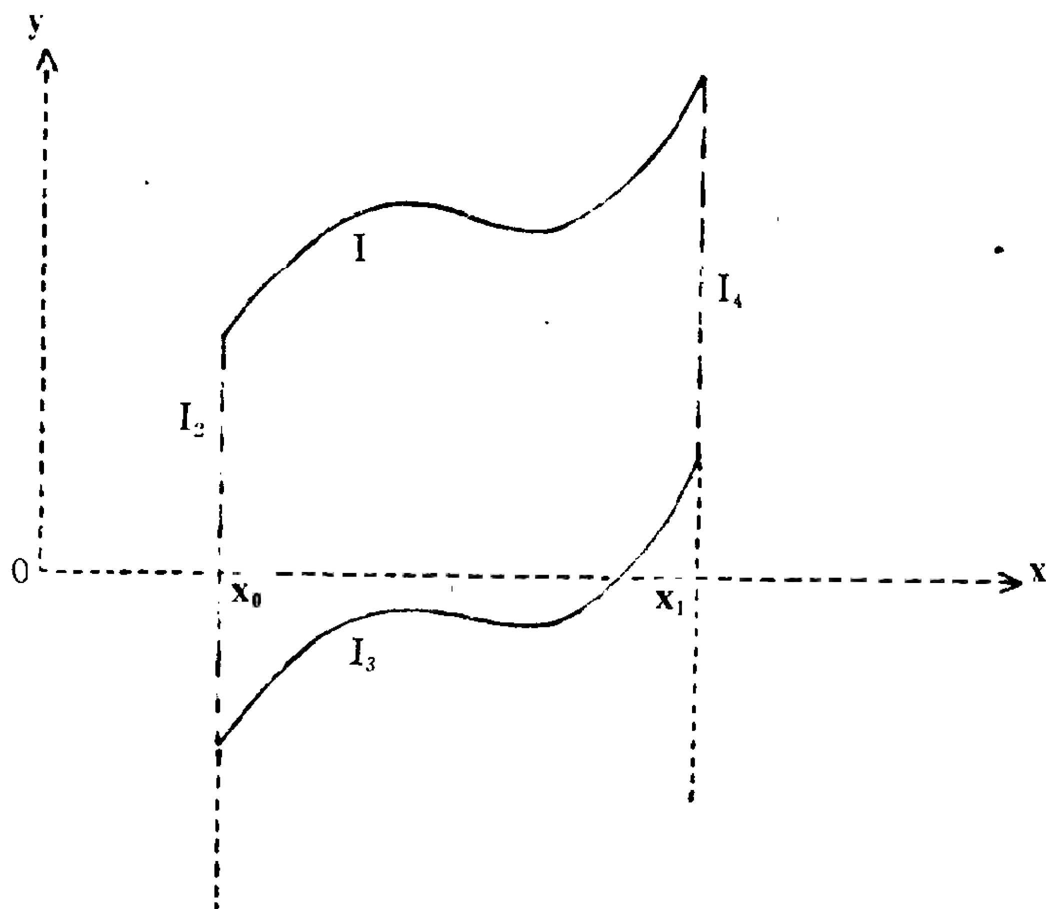


图 1

回到核 $K(z,w)$，(4.5) 表明 $\int_I \left|\int_I K_\tau(z+i\tau,w)dw\right| ds \leqslant C|I|$. 为得到这一不等式，我们改变积分路径，即把 I(由 $z(x)=x+ia(x)$，$x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 定义) 改为并集 $I_2 \cup I_3 \cup I_4 = J$，其中 I_2 由 $z=x_0+iy, a(x_0)-l \leqslant y \leqslant a(x_0)$ 定义，$l=x_1-x_0$，I_3 由 $z(x)=x+i(a(x)-l), x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 定义，最后 I_4 由 $z(x)=x_1+iy$，$a(x_1)-l \leqslant y \leqslant a(x_1)$ 定义.

显然有 $\int_I K_\tau(z,w)dw = \int_{I_2} K_\tau(z,w)dw + \int_{I_3} K_\tau(z,w)dw + \int_{I_4} K_\tau(z,w)dw$；然后，只需利用估计式 $|K_\tau(z,w)| \leqslant C|z-w|^{-1}$ 和显然的注释 $\int_I\int_{I_j} |z-w|^{-1}\, ds\, d\sigma \leqslant C\ |I|$，其中 $j=2,3,4$.

为建立(4.6)，以对称的方式进行推理，用一个完全在 Γ 上方的路径补充 I. 定理 4 证毕.

我们要导出算子 $T: L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ 的一个交换代数的存在性，对这个代数我们要配置一个象征算法. 象征 $m(\zeta)$ 将是全纯的 Marcinkiewicz 象征. 它们定义在挖去点 0 的 $\mathbb{R}$ 上，并且对满足 $C \geqslant 0$ 和 $\alpha > 1$ 的两个常数 C 和 α 满足估计.

$$\left|\left(\frac{d}{d\xi}\right)^k m(\xi)\right| \leqslant C\ \alpha^k kl\ |\xi|^{-k}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

这就蕴涵 $m(\xi)$ 是一个在开区域 $|\eta| < \beta|\xi|$ 内全纯且有界的函数在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上的限制，其中 $0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$. 反之，若 $\beta > \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$，而 $m(\xi)$ 在 $|\eta| < \beta|\xi|$ 内全纯并且有界，那么(4.7) 成立.

在对于算子理论的应用中，应假定 $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} > M = \|a'\|_\infty$(请记住，Lipschitz 曲线即 Lipschitz 函数的图象). 这就允许选择 β，使之满足 $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} > \beta > M$. 我们要考虑的象征代数是

对于 $a>1, \alpha<\frac{\sqrt{1+M^2}}{M}$，由(4.7)定义的类的并集. 这个并集还是在由 $|\eta|<\beta|\xi|$ 定义的一个角形区域 G 内全纯且有界的函数的代数，其中 $\beta>M$. 我们用 S_M 记象征 $m(\xi)$ 的这个代数.

对所有象征 $m\in S_M$，我们将令一个分布与之对应，S 是 m 的 Fourier-Laplace 逆变换. S 的计算由我们就要介绍的逼近技术得以简化.

对所有 $\varepsilon>0$ 和所有的 $m\in S_M$，令 $m_\varepsilon(\xi)=\exp(-\varepsilon|\xi|)m(\xi)$. 若 $\zeta=\xi+i\eta, \xi>0, m_\varepsilon(\zeta)=m(\zeta)\exp(-\varepsilon\zeta)$，而若 $\xi<0, m_\varepsilon(\zeta)=m(\zeta)\exp(\varepsilon\zeta)$. 可以直接验证 $m_\varepsilon(\xi), \varepsilon>0$，组成 S_M 中的一个有界集.

若 m 属于 S_M，开始先用 $S_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}m_\varepsilon(\xi)d\xi$ 定义 $S_\varepsilon(x)$. 象征 $m_\varepsilon(\xi)$ 在缓增分布的意义下收敛到 $m(\xi)$，而 S_ε 收敛到 S，S 是 m 的逆 Fourier 变换.

我们要刻画如此得到的分布 S 的特征. 为此把它定义为某些全纯函数的边值.

对 $\gamma>0$，以下列方式定义 H_γ^+ 和 H_γ^-: $F\in H_\gamma^+$，如果 F 在 $y>-\gamma|x|$ 内是全纯的，并对某一常数 C，满足 $|F(z)|\leqslant C|z|^{-1}$，而同样空间 H_γ^- 由在 $y<\gamma|x|$ 内全纯且满足同一增长条件的全纯函数组成.

分布 S 的特征刻画基于下列命题.

命题1 设 $m\in S_M$ 是一个由$[0,\infty[$支撑的象征，那么对于某个 $\gamma>M$ 它的逆 Fourier 变换属于 H_γ^+，函数 $S(x+i\varepsilon), \varepsilon>0$，在缓增分布的意义下收敛到一个分布 S，S 是一个象征 $m\in S_M$ 的逆 Fourier 变换.

为验证第一个断言，若假定 $m\in L^1(0,\infty)$，可径直写出 $S(x)$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\xi}m(\xi)d\xi$，一般情形可用上面叙述的逼近方法归结为这种情形. 这时 $S(x)$ 是在 $I_m z > 0$ 定义的 $S(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\xi}m(\xi)d\xi$ 在实轴上的限制. 固定 z，把积分路径 $[0,\infty[$ 换成半直线 $\zeta = (1 + ip)t, t \geqslant 0$. 当 $y + px > 0 (z = x + iy)$ 和 $|p| < \beta$ 时这是可能的；若 $x \geqslant 0$，可在 $[0,\beta[$ 内任意选择 p，而若 $x \leqslant 0$ 可在 $]-\beta,0]$ 任意选择 p. 一旦实现了路径的这一变换，$S(z)$ 就自动地被延拓成一个在开半平面 $y + px > 0, |p| < \beta$，的并集为全纯的函数. 这个并集正是由 $y > -\beta|x|$ 定义的开集.

依靠下列引理验证 $|S(z)| \leqslant C|z|^{-1}$.

引理 8 假定 $m(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $|m(\xi)| \leqslant C_0$，在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 内是 C^2 类的，且其二阶导数 $m''(\xi)$ 满足 $|m''(\xi)| \leqslant C_2\xi^{-2}$. 那么 m 的逆 Fourier 变换 S 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 内连续并且满足 $|S(x)| \leqslant C|x|^{-1}$.

初等的证明在于对振动积分 $\int m(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ 分部积分两次，该积分只是在无穷远点有问题. 细节留给读者.

这个引理配合一个逆命题，设分布 $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 具有下列性质：

乘积 $xS(x)$ 局部可积， (4.8)

存在一个常数 C_0 使对所有 $T_1 > 0$，有 $\left|\int_{-T}^{T} S(x)dx\right| \leqslant C_0$， (4.9)

$S(x)$ 在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 内是 C^1 类的，在无穷远点是零并且 $|S'(x)| \leqslant C_1x^{-2}$. (4.10)

那么 S 的逆 Fourier 变换属于 $L^\infty(\mathbb{R})$.

这个逆允许为命题 1 建立逆，细节留给读者.

对于构造一个同构于象征代数 S_M 的算子 $T: L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ 的交换代数 A_M，我们已经准备就绪.

设 $m \in S_M$ 是一个由 $[0,\infty[$ 支撑的象征. 作为 m 的逆 Fourier

变换的分布 S 可延拓为一个在 $y > -\beta|x|$ 内全纯的函数，$\beta > M$ 是某一常数.

再令核 $K(z,w) = S(z-w)$. 它满足定理 4 的条件，并定义一个在 $L^2(\Gamma)$ 上有界的算子. 用 T_m 表示这个算子. 设 m_1 和 m_2 是两个属于 S_M 的象征，其支集含于$[0,\infty[$. 对应的算子记作 T_1 和 T_2，这两个算子的核是 $S_1(z-w)$ 和 $S_2(z-w)$. 为计算算子 $T_3 = T_2T_1$，用 $m_1(\xi)e^{-\varepsilon\xi}$ 和 $m_2(\xi)e^{-\varepsilon\xi}$ 代替 $m_1(\xi)m_2(\xi)$. 这归结为 $S_1(z-w)$ 代以 $S_1(z+i\varepsilon-w)$，对 S_2 亦如是. 于是 $T_2^\varepsilon T_1^\varepsilon$ 由核 $K_\varepsilon(z,w) = \int_\Gamma S_1(z+i\varepsilon-\zeta)S_2(\zeta+i\varepsilon-w)d\zeta, z\in\Gamma, w\in\Gamma$，定义. 可以把它写成

$$K_3(z,w) = \int_{\Gamma+i\varepsilon} S_1(z+2i\varepsilon-\zeta)S_2(\zeta-w)d\zeta$$
$$= R_3(z+2i\varepsilon-w),$$

而通过一个简单的积分路径改变即可验证 $R_3(x)$ 的 Fourier 变换是乘积 $m_1(\xi)m_2(\xi)$.

这就证明了 T_3 是相应于象征乘积 $m_3(\xi) = m_1(\xi)m_2(\xi)$ 的算子.

其余的情形是类似的，并得到了所说的算子代数 A_M 和象征代数 S_M 间的同构. $L^2(\Gamma;ds)$ 在 Hardy 空间 $H^2(\Omega_1)$ 上以 $H^2(\Omega_2)$ 为核的斜投影算子的象征是$[0,\infty[$ 的指示函数，同样 $L^2(\Gamma;ds)$ 在 $H^2(\Omega_2)$ 上以 $H^2(\Omega_1)$ 为核的斜投影算子的象征是$]-\infty,0]$的指示函数. 若用 χ_+ 和 χ_- 记这两个指示函数，把 $f = F_+ + F_-$ $(F_+\in H^2(\Omega_1), F_-\in H^2(\Omega_2))$ 变换成 $F_+(z+i\varepsilon)$ 的算子对应象征 $e^{-\varepsilon\xi}\chi_+(\xi)$，$\varepsilon > 0$，这里我们把 $F_+(z+i\varepsilon)$ 考虑作 $L^2(\Gamma;ds)$ 中的函数.

我们对 $T(b)$ 定理的最后一个应用关系到 C. Kenig 的下列定理([157]).

定理 5 设 Ω_1 是位于一个 Lipschitz 函数 a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的图象上方的开集，则 $H^2(\Omega_1)$，上范数 $\left[\int_\Gamma |F(z)|^2 d\partial\right]^{1/2}$ 和

$$\left[\iint_\Omega |F'(z)|^2 (y - a(x)) dx dy\right]^{1/2}$$ 是等价的.

我们首先验证存在一个常数 $C = C'(M)$，$M = \|a'\|_\infty$，使对 $F \in H^2(\Omega_1)$ 有

$$\left(\iint_\Omega |F'(z)|^2 (y - a(x)) dx dy\right)^{1/2} \leqslant C(M)\left(\int_\Gamma |F(z)|^2 ds\right)^{1/2}. \tag{4.11}$$

然后将证明这个估计的一种强的形式自动推出反向不等式.

为建立(4.11)，考虑在 $H = L^2(0,\infty)$ 内取值的由 $\mathbb{K}(z,w) = K(z,w,t) = t^{1/2}(z + it - w)^{-2}$，$z \in \Gamma$，$w \in \Gamma$，定义的核. 那么若 f 属于 $H^2(\Omega_1)$，

$$\int_\Gamma K(z,w,t) f(w) dw = -2\pi i\, t^{1/2} f'(z + it).$$

于是不等式(4.11)从以$\mathbb{K}(z,w)$为核的算子 T: $L^2(\Gamma) \to L^2_H(\Gamma)$ 的连续性这一更强的性质得到. 为避免利用奇异积分，比较方便的作法是：用一个由核 $K_N(z,w,t)$($= K(z,w,t)$ 当 $N^{-1} \leqslant t \leqslant N$；0，其余) 定义的截断算子序列代替 T.

T 的连续性则是 $T(b)$ 定理的 Hilbert 说法的直接推论. 第 11 章条件(14.2) 和(14.3) 的验证通过路径变换来进行，这个变换跟本章第 4 节图 5 所示的相同. 细节留给读者.

一旦建立了这个连续性，我们利用下列值得注意的等式证明反向不等式：对 $F \in H^2(\Omega_1)$

$$F(z) = \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \int_\Gamma t \frac{F'(w + it)}{(z + it - w)^2} dw\, dt. \tag{4.12}$$

从建立(4.12)开始. 写出 $z + it - w = z + 2it - (w + it)$，从而$\int_\Gamma \frac{F'(w + it)}{(z + it - w)^2} dw = \int_{\Gamma + it} \frac{F'(\zeta) ds}{(\zeta - (z + 2it))^2} = 2\pi i\, F''(z + 2it)$.

然后进行两次分部积分即得

$$\int_0^\infty tF''(z+2it)dt = -\frac{1}{4}F(z).$$

由于核 $K(z,w,t):L^2(\Gamma)\to L^2(\Omega_1)$ 有界，对所有函数 $f(z,t)\in L^2(\Omega_1)$ 有

$$\iint_{\Omega_1} K(z,w,t)f(z,t)dzdt = g(w)\in L^2(\Gamma).$$

为了同(4.12)中的记号相当，还是交换 z 和 w 的地位为好.

算子 $T:L^2(\Gamma)\to L^2_H(\Gamma)$ 的连续性通过过渡到伴随算子，即推出下列结果：对所有函数 $f(w,t)\in L^2(\Omega_1), w\in\Gamma, t>0$,

$$g(z)=\int_\Gamma\int_0^\infty t^{1/2}(w+it-z)^{-2}f(x,t)dw\,dt$$

属于 $L^2(\Gamma)$ 并且有

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega_1)}, \tag{4.13}$$

其中 C 仅依赖于 $M=\|a'\|_\infty$.

同样的结果自然对 Ω_2(Γ 下方的开集）也成立，这归结为在 g 的定义中把 i 改变为 $-i$，因而令

$$h(z)=\mathscr{L}(f)(z)=\int_\Gamma\int_0^\infty t^{1/2}(w-it-z)^{-2}f(w,t)dwdt.$$

回到(4.12)，令 $f(w,t)=t^{1/2}F'(w+it)$. 即得 $F=\frac{2i}{\pi}\mathscr{L}(f)$，显然这就给出

$$\|F''\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant\left[C\iint_{\Omega_1}t|F'(z+it)|^2dxdy\right]^{1/2}.$$

在结束 Kenig 定理之前，我们要利用小波语言改写它. 对所有 $w\notin\Gamma$，考虑函数 $\psi_\zeta\in L^2(\Gamma;ds)$，它由 $\psi_\zeta(z)=(dist(\zeta,\Gamma))^{1/2}(\zeta-z)^{-2}$ 定义. 这个 z 的函数有对小波所期待的正则性和局部性. 但 $\psi_\zeta(z)$ 的相消性表示为$\int_\Gamma\psi_\zeta(z)dz=0$. 最后函数 $\psi_\zeta(t)$ 不是以通常方式标准化的（为了得到一个满足 $c_1\leqslant\|\psi_\zeta\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant c_2$ 的规范化，宜用$(\mathrm{dist}(\zeta,\Gamma))^{3/2}$ 代替$(\mathrm{dist}\ (\zeta,\Gamma))^{1/2}$).

我们的小波以 $\zeta \in \mathbb{C}$ 标识，而后考虑形如

$$g(z) = \iint \psi_\zeta(z)\alpha(\zeta)d\xi d\eta \tag{4.14}$$

的小波的（连续）线性组合，其中系数 $\alpha(\zeta)$ 满足

$$\iint |\alpha(\zeta)|^2 d\xi d\eta < \infty. \tag{4.15}$$

今有

定理 6 沿用前述记号，存在常数 $C = C(M)$，$M = \| a' \|_\infty$，使成立 $\| g \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C\left[\iint |\alpha(\zeta)|^2 d\xi\, d\eta\right]^{1/2}$. 此外把 α 变换为 g 的连续线性算子 $\mathscr{L}$: $L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\Gamma)$ 是满射.

在证明这一定理之前，我们注意到它提供了一个任意函数 $g \in L^2(\Gamma)$ 可分解成和 $g_1 + g_2$，其中 $g_1 \in H^2(\Omega_1)$，$g_2 \in H^2(\Omega_2)$，的一个特别简单的证明.

事实上，$g = \mathscr{L}(\alpha)$，只需把 α 分解成 $\alpha_1 + \alpha_2$，α_1 和 α_2 分别由 Ω_1 和 Ω_2 支撑. 再令 $g_1 = \mathscr{L}(\alpha_1)$，$g_2 = \mathscr{L}(\alpha_2)$.

我们过渡到定理 6 的证明.

$\mathscr{L}$ 的连续性直接从(4.13)得到. 结合等式 $L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2)$，由定理 5 便推出 $\mathscr{L}$ 的连续性. $\mathscr{L}$ 是满射这一事实同样用这些材料推出. 开始把 g 分解成 $g_1 + g_2$，其中 $g_1 \in H^2(\Omega_1)$，$g_2 \in H^2(\Omega_2)$，那么等式(4.12) 就允许把 g_1 和 g_2 分解成小波.

P. Jones 和 S. Semmes 曾发现([64])仅利用定理 5 和一些十分简单的推演即可证明 Calderon 定理. 这个证明在 1987 年春得到，但在十年前即有可能被发现.

5. 最简短的证明

为使 P. Jones 和 S. Semmes 的证明有兴味，重要的是莫要使 C. Kenig 定理依赖于 $T(b)$ 定理，因为 "Calderon 定理"同样是 $T(b)$

定理的直接推论.

但长久以来已经出现了 C. Kenig 定理的许多直接证明. 第一个属于 B. Bahlberg ([81]和[82]), 另一个可在 C. Kenig 的论文中找到. 利用这个或那个直接证明, 便可得到在 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的 L^2 连续性. 我们现在正是要叙述这个证明.

以建立定理 6 的算子 $\mathscr{L}$ 的连续性作为开始, 而不利用 "Calderon 定理"所给的分解 $L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2)$.

这就是说从 $f(z,t) \in L^2(\Omega_1)$ 出发, 其中 $z \in \Gamma, t > 0$, $(z,t) \in x]0,\infty[$ 等价于 $z + it \in \Omega_1$. 然后令

$$g_{\pm}(w) = \int_{\Gamma}\int_0^{\infty} \frac{t^{1/2}}{(z - w \pm it)^2} f(z,t)dzdt, \qquad (5.1)$$

并打算证明

$$\| g_{\pm} \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \| f \|_{L^2(\Omega_1)}. \qquad (5.2)$$

仅处理核 $t^{1/2}(z - w + iz)^{-2}$ 的情形, 另一种情形类似, 把它留给读者. $g(w)$ 在 Ω_2 内全纯, 并且为了应用定理 5, 重要的是要预先知道 $g(w)$ 属于 $H^2(\Omega_2)$. 但为此只需假定 $f(w,t)$ 是一个紧支集含于 Ω_1 内的函数. 简单的过渡到极限即可得一般情形.

通过 C. Kenig 定理, 即用估计 $\iint_{\Omega_2} \operatorname{dist}(w,\Gamma)|g'(w)|^2 dudv$ (其中 $w = u + iv$) 估算 $\int_{\Gamma}|g(w)|^2 ds$.

然后写下 $|g'(w)|^2 = g'(w)\overline{g'(w)}$, 这就引导到上估六重积分

$$I = \iint_{\Omega_1}\iint_{\Omega_1}\iint_{\Omega_2} \frac{(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^{1/2}(\operatorname{dist}(\zeta,\Gamma))^{1/2}}{|z - w|^3\,|\zeta - w|^3}$$
$$\times\ |f(z)||f(\zeta)|\operatorname{dist}(w,\Gamma)dxdyd\xi d\eta dudv.$$

少许改变一下记号, 令 $z = x + iy \in \Omega_1$, $\zeta = \xi + i\eta \in \Omega_1$ 和 $w = u + iv \in \Omega_2$.

于是由 $z \in \Omega_1$, $w \in \Omega_2$ 推出

$$|z-w| \leqslant \frac{1}{2}|z-w| + \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z,\Gamma).$$

令 $a \wedge b = \inf(a,b)$，注意到 $z \in \Omega_1, \zeta \in \Omega_1$ 和 $w \in \Omega_2$ 蕴涵

$$\operatorname{dist}(w,\Gamma) \leqslant |w-z| \wedge |w-\zeta|.$$

最后，对所有 $\alpha > 0$，存在一个常数 $C(\alpha)$ 使对 $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, r > 0$ 和 $R > 0$ 有

$$\iint \frac{|z-a| \wedge |z-b|}{(|z-a|^3+R^3)(|z-b|^3+r^3)}\, dxdy \leqslant C(\alpha)\frac{(r \wedge R)^{-\alpha}}{(|b-a|+R+r)^{3-\alpha}}. \tag{5.3}$$

还要估计

$$\iint_{\Omega_1}\iint_{\Omega_1} R(z,\zeta)|f(z)||f(\zeta)|\, dxdy\, d\xi d\eta,$$

其中 $R(z,\zeta)=$

$$\frac{(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^{1/2}(\operatorname{dist}(\zeta,\Gamma))^{1/2}(\operatorname{dist}(z,\Gamma)) \wedge (\operatorname{dist}(\zeta,\Gamma))^{-\alpha}}{(|z-\zeta|+\operatorname{dist}(z,\Gamma)+\operatorname{dist}(\zeta,\Gamma))^{3-\alpha}}$$

为此，只需应用 Schur 引理，即要验证存在一个常数 C 使 $\iint R(z,\zeta)dxdy \leqslant C$，那么核 $R(z,\zeta)$ 的对称性就允许得出我们欲证的 L^2 连续性. 验证是简单的，因为只需利用新变量 x 和 $t = y - a(x)$ 归结为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^{1/2}\tau^{1/2}(t \wedge \tau)^{-\alpha}}{(|x-\xi|+t+\tau)^{3-\alpha}}\, dxdt,$$

此式的上估是直接的.

刚才我们验证了若 $g_{\pm}(w) = \int_{\Gamma}\int_0^{\infty}\frac{t^{1/2}}{(z-w\pm it)^2}f(z,t)dydt$，则有

$$\| g_{\pm} \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C\left[\int_{\Gamma}\int_0^{\infty}|f(z,t)|^2 dsdt\right]^{1/2}, \tag{5.4}$$

于是由 Cauchy 核所定义的算子的 L^2 连续性是(5.4)的一个对偶形式. 其理由如下.

给定任意一个函数 $h \in L^2(\Gamma,ds)$，我们来估计 $J = \int_{\Gamma} g_{\pm}(w)h(w)dw$. 由于(5.4)，对所有 $f \in L^2(\Omega_1)$ 有

$$|J| \leqslant C \| h \|_{L^2(\Gamma)} \| f \|_{L^2(\Omega_1)}.$$

当 f 跑遍 $L^2(\Omega_1)$ 的单位球时取上确界，并令 $F_{\pm}(z,t) = t^{1/2}\int_{\Gamma}(z - w \pm it)^{-2}h(w)dw$，则得

$$\| F_{\pm} \|_{L^2(\Omega_1)} \leqslant C \| h \|_{L^2(\Gamma)}. \tag{5.5}$$

再用 Cauchy 公式表示 $F_{\pm}$. 令

$$H_{\pm}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h(w)}{w-\zeta}dw, \zeta \in \Omega_1, \tag{5.6}$$

则有

$$F_{+}(z,t) = 2\pi i\, t^{1/2} H'_{+}(z+it), z \in \Gamma, t > 0.$$

不等式(5.5)结合定理 5 给出

$$\| H_{+} \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C\left[\int_{\Gamma}\int_0^{\infty} t|H'_{+}(z+it)|^2 ds dt\right]^{1/2} \leqslant C' \| h \|_{L^2(\Gamma)}. \tag{5.7}$$

从而建立了 Cauchy 算子的连续性.

最后还有一个有兴趣的问题，找两个离散子集 $S_1 \subset \Omega_1$ 和 $S_2 \subset \Omega_2$，使得两个小波 $\psi_{\zeta}, \zeta \in S_1$ 和 $\zeta \in S_2$（在按 L^2 范数标准化以后）组成 $L^2(\Gamma;ds)$ 的一个 Riesz 基. 这就允许模仿对标准正交的小波所作的事情重新构造 $L^2(\Gamma;ds)$ 上的算子，这些算子保持 Hardy 空间 $H^2(\Omega_1)$ 和 $H^2(\Omega_2)$ 不变.

6. Guy David 定理的陈述

本章余下部分用于这个定理的表述和证明. 这个定理在一定意义下封闭了在可求长曲线上的 Cauchy 核的连续性问题.

以基于广义 Hardy 空间的几何逼近作为开始，设 D 是复平面上的一个区域（即一个有界连通开集），其边界是一条可求长 Jor-

dan 曲线 Γ. 为书写方便，将假定 Γ 的总长度为 1，并且把 Γ 的参数表示记为 $z(s)$，$0 \leqslant s \leqslant 1$，这里参数是弧长.

对 $1 < p < \infty$，令 $L^p(\Gamma) = L^p(\Gamma; ds)$，它同构于 $L^p[0,1]$.

沿用 Keldysh，Lavrentiev 和 Smirnov 的术语，用 $H^p(\Gamma) \subset L^p(\Gamma)$ 表示 z 的多项式在 $L^p(\Gamma)$ 内的闭包，而 $\mathscr{H}^p(\Gamma)$ 将是由对所有 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\int_\Gamma z^k f(z) dz = 0$ 的 $f \in L^p(\Gamma)$ 组成的或许比 $H^p(\Gamma)$ 更大的空间.

若 f 属于 $\mathscr{H}^p(\Gamma)$，那么由 $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 定义的函数 $F: D \to \mathbb{C}$ 在 D 内全纯，并且 f 是 F 在 Γ 上的在下列意义下的迹：在几乎所有的点 $z_0 \in \Gamma$，$f(z_0)$ 是当 z 趋向于 z_0 时的非切向极限.

为验证这个性质，用 z^* 表示 z 关于 z_0 的对称点，并注意到

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = 0. \tag{6.1}$$

验证是直接的，因为 $g(\zeta) = (\zeta - z^*)^{-1}$ 属于 $H^q(D)$ 并且当 $f \in \mathscr{H}^p(\Gamma)$，$g \in H^q(\Gamma)$ 时 $\int_\Gamma f(\zeta) g(\zeta) d\zeta = 0$.

然后 Cauchy 核代以

$$K(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left[(\zeta - z)^{-1} - (\zeta - z^*)^{-1}\right].$$

取一点 $z_0 = z(s_0)$ 使 $z'(s_0)$ 存在. 那么若 $|s - s_0| < \varepsilon$，$z(s)$ 属于一个由 $\zeta = tz'(s_0)e^{i\varphi}$ 定义的角形区域，这里 $|\varphi| \leqslant \varphi(\varepsilon)$，$t \in \mathbb{R}$，而 $\varphi(\varepsilon)$ 随 ε 趋于 0. 最后易于验证，若 z 属于一个含于 D 且其边界不包 Γ 在 z_0 的切线的区域 $S(z_0)$，则 $K(z,\zeta)$ 满足（当 ζ 充分接近 z_0 时）在定理 1 的证明中我们用过的估计.

现在设 $0 \in D$ 并把 $\overline{D}$ 在复平面上的余集记作 Ω. 把 $H^p(\Omega)$ 定义在无穷远点为零的 $1/z$ 的多项式在 $L^p(\Gamma)$ 中的闭包，同样，$\mathscr{H}^p(\Omega)$ 将由对 $k \geqslant 1$，$k \in \mathbb{N}$，$\int_\Gamma f(z) z^{-k} dz = 0$ 定义.

还可在 Riemann 球面上直接讨论问题. 用 Γ 表示在这个球面上画出的一条可求长 Jordan 曲线，它界定两个连通成分 D_1 和 D_2.

把 $H^p(D_2)$ 定义作极点属于 D_2 的有理分式函数 $P(z)/Q(z)$ 在 $L^p(\Gamma)$ 内的闭包，对 $H^p(D_2)$ 类似地下定义．为避免常数同时属于 $H^p(D_1)$ 和 $H^p(D_2)$，我们要求 $H^p(D_2)$ 中的函数在一个点 $z_0 \in D_2$ 取值为零，以此把 $H^p(D_2)$ 的函数标准化．

回到复平面的情形．那么所有其极点不属于 Γ 的有理分式的 $P(z)/Q(z)$ 以唯一的方式写成

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}, \tag{6.2}$$

其中 $\frac{P_1}{Q_1}$ 在 D 内全纯（并且在 $\overline{D}$ 上连续）而 $\frac{P_2}{Q_2}$ 在 Ω 内全纯在 $\overline{\Omega}$ 上连续并在无穷远点为零．以 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 表示由 $\mathscr{C}_1(P/Q) = P_1/Q_1$ 和 $\mathscr{C}_2(P/Q) = P_2/Q_2$ 定义的算子．

Hartogs-Rosenthal 定理告诉我们，若 $K \subset \mathbb{C}$ 是复平面的一个紧集且 K 是零测集（对于 $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度 $dxdy$，那么其极点集不含于 K 的有理分式 $P(z)/Q(z)$ 在 K 上连续的函数集中是稠密的．

为验证上述事实，我们利用 Hahn-Banach 定理，并采用归谬推理，设 μ 是一个由 K 支撑并正交于问题中的有理分式的复 Radon 测度．把 μ 换成 $\overline{\mu}$，这个条件可写成在 K 的余集上 $\mu * \frac{1}{z} = 0$．但 μ 是一个有紧支集的测度并且 $1/z$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是局部可积的．由此得 $\mu * \frac{1}{z}$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，并且在 $\mathbb{R}^2$ 内几乎处处为零，因而作为 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中的函数是零．最后，在分布意义下有 $\mu * \frac{1}{z} = 0$，利用算子 $\partial/\partial\bar{z}$ 即得 $\mu = 0$．

我们的可度长曲线 Γ 是复平面上的一个测度为零的紧子集，从 Hartogs-Rosenthal 定理得知在 Γ 上连续的有理分式 $f(z) = P(z)/Q(z)$ 在 $L^p(\Gamma)$ 内稠密，$1 < p < \infty$．我们用 $R(\Gamma) \subset L^p(\Gamma)$ 表示这个稠密向量子空间．

对几乎所有的 $z_0 \in \Gamma$ 和 $f = P/Q \in R(\Gamma)$ 有

$$\frac{P_1(z_0)}{Q_1(z_0)} - \frac{P_2(z_0)}{Q_2(z_0)} = \frac{1}{\pi i}\ \text{v. p.}\ \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{6.3}$$

并且这个主值对所有使 $z'(s_0)$ 存在的点 $z_0 = z(s_0)$ 都存在，用一个初等的计算即可建立这一事实，具体计算留给读者.

最后

$$\frac{P_1(z_0)}{Q_1(z_0)} = \frac{1}{2}f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\ \text{v. p.}\ \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

我们的问题是要知道是否算子 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 可扩张为在 $L^2(\Gamma)$ 上的两个连续线性算子. Hartogs-Rosenthal 定理告诉我们这个问题有意义.

现在可以表述 G. David 定理([93]).

定理 8 设 Γ 是一条可求长 Jordan 曲线，其总长度记作 l. 沿用前述记号，Γ 的下述五个性质等价：

存在一个常数 $C \geqslant 2$ 使对所有 $r > 0$ 和所有 $z_0 \in \Gamma$，有

$$|\{s \in [0,l]; |z(s) - z_0| \leqslant r\}| \leqslant Cr \tag{6.4}$$

$L^2(\Gamma) = H^2(D) + H^2(\Omega)$，这个直和仅当 Γ 是圆周时是正交的. (6.5)

$L^p(\Gamma) = H^p(D) + H^p(\Omega)$ 对某一个 $p \in]1,\infty[$ (6.6)

$L^p(\Gamma) = H^p(D) + H^p(\Omega)$ 对所有 $p \in]1,\infty[$ (6.7)

条件(6.7)满足并且

$$H^p(D) = \mathscr{H}^p(D),\ H^p(\Omega) = \mathscr{H}^p(\Omega). \tag{6.8}$$

条件(6.4)由 Ahlfors ([1])引进，为了这个理由，满足这个条件的曲线 Γ 将称为在 Ahlfors 意义下的正则曲线. Ahlfors 条件表明，对复平面上的所有圆盘，位于这个圆盘内的 Γ 的那部分的总长度从不超过这个圆盘的直径的 C 倍，C 是一个固定常数.

当 Γ 通过无穷远点时，显然有一个与这个定理类似的表述. 这时将假定对于 $z_0 \notin \Gamma$，对所有 $p > 1$，$\int_\Gamma |z(s) - z_0|^{-p}\,ds < \infty$. 这

个条件保证了在无穷远点为零在 Γ 上连续的有理分式属于 $L^p(\Gamma)$.

用 Ω_1 和 Ω_2 表示被 Γ 界定的两个连通开集. 那么广义 Hardy 空间 $H^p(\Omega_1)$ 和 $H^p(\Omega_2)$ 定义为在 Ω_1 或 Ω_2 内全纯的在 Γ 上连续的且在无穷远点为零的有理分式 f_1 或 f_2 在 $L^p(\Gamma;ds)$ 内的闭包.

我们要解决的问题是希望知道是否对一个 $p\in]1,\infty[$ 或所有 $p\in]1,\infty[$ $L^p(\Gamma)$ 是 $H^p(\Omega_1)$ 和 $H^p(\Omega_2)$ 的直和.

这里问题仍然不依赖于 p 并且等价于条件(6.4),不过这次 r 要跑遍 $]0,\infty[$,并且大的 r 起作用.

Ahlfors 正则曲线的一个例子由 Lavrentiev 曲线给出. 这指的是可度长 Jordan 曲线 $z(s)$, $-\infty<s<\infty$,对于它存在一个常数 $C\geqslant 1$ 使得对所有 $s\in\mathbb{R}$ 和所有 $t>s$, $t-s\leqslant C|z(t)-z(s)|$. 在 Lavrentiev 曲线的情形,Cauchy 核的主值 v. p. $(z(s)-z(t))^{-1}$ 满足 Calderon-Zygmund 估计,这是十分方便的. 在 G. David 定理的证明中所遇到的困难之一是相应的 Cauchy 核不再满足这些估计: $(z(s)-z(t))^{-1}$ 的奇异性可能比 Calderon-Zygmund 核的奇异性强得多.

在本节我们要简单地证明对于算子 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 在不论哪一个空间 $L^p(\Gamma)$ 上的连续性,(6.4) 都是必要的.

考虑中心为 $z_0\in\Gamma$ 半径为 $r>0$ 的一个圆盘 D,把使 $z(s)$ 属于 D 的 $s\in\mathbb{R}$ 的集合记作 E,再用 $z_1=z(s_1)$ 表示 Γ 的使 $|z_0-z_1|=10r$ 的一个点. 由于 s 跑遍整个数直线时 $|z(s)-z_0|$ 取 0 和 ∞ 之间的所有值,这样的 s_1 是存在的. 最后考虑区间 $I=[s_1-r/2,s_1+r/2]$. 若 s 属于 I,显然有 $|z(s)-z_1|\leqslant r/2$. 用 α 表示 z_0-z_1 的幅角. 那么当 $z\in\Gamma\cap D$ 且 $\zeta=z(s)$, $s\in I$ 时, $z-\zeta$ 的模含在 $8r$ 和 $12r$ 之间,而 $z-\zeta$ 的幅角属于 $\left[\alpha-\frac{\pi}{4},\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$. 由此推出对所有被 E 支撑的函数 $f(s)\geqslant 0$ 和所有 $t\in I$ 有

$$\left|\int_E (z(s)-z(t))^{-1} f(s)ds\right|\geqslant Cr^{-1}\int_E f(s)ds, \qquad (6.9)$$

其中 $C > 0$ 易一个易于算出的常数. 把这个注释用于 E 的指示函数,并把

$$g(t) = \int_E (z(s) - z(t))^{-1} f(s) ds$$

限制在 I 上,它的 L^p 范数应被 f 的 L^p 范数所控制.

遂有 $r^{-1+1/p}|E| \leqslant C'|E|^{1/p}$,即 $|E| \leqslant C''r$,这正是必须证明的.

本章的余下部分用于逆命题,即蕴涵关系(6.4)⇒(6.8)的证明.

证明计划如下.

Ahlfors 正则曲线的几何定义蕴涵对所有尺度,正则曲线 Γ 允许有一个好的 Lipschitz 复制曲线. 更精确地说,当(6.4)满足时,存在一个常数 M,使得对所有区间 $I \subset \mathbb{R}$,可以找到一个标准正交坐标系 R_I 和一个 Lipschitz 函数 a_I 满足 $\| a'_I \|_\infty \leqslant M$ 并且 a_I 的图象 Γ_I 在坐标系 R_I 内的参数表示,记为 $z_I(s)$,对 $s \in E \subset I$ 满足 $z_I(s) = z(s)$, 其中

$$|E| \geqslant \gamma |I|, \tag{6.10}$$

$\gamma > 0$ 和 $M > 0$ 是两个常数,它们仅依赖于(6.4) 中的 $C \geqslant 2$.

证明的第二个重点是把对 Lipschitz 曲线已知的估计转移到定理 8 所描述的一般曲线上. 这个转移法基于由 Calderon 和 Zygmund 开创并由 Burkholder 和 Gundy 发展的实分析方法. 这些方法类似于在第 7 章曾经叙述过的方法. 下节就予以介绍.

7. 转移

设$\mathbb{C}^*$是挖掉 0 的复平面,K 是定义在$\mathbb{C}^*$上的一个-1 阶齐次的奇函数. 还假定 K 在$\mathbb{C}^*$内无穷次可微.

设 μ 是复平面上的一个正的 Radon 测度. 对所有 $\varepsilon > 0$, 作由

$$T_\varepsilon^\mu f(z) = \int_{|z-w| \geqslant \varepsilon} K(z-w) f(w) d\mu(w) \tag{7.1}$$

定义的截断算子 T_ε^μ，这里 f 有紧支集并且连续.

再定义极大算子 T_*^μ 如下

$$T_*^\mu f(z) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon^\mu f(z)|. \tag{7.2}$$

刻画对所有满足上述假设的 K，使算子 T_*^μ 在 $L^2(d\mu)$ 上有界这一种情形成立的测度 μ 的特征，这是一个尚未解决的问题.

我们打算证明若 μ 是 Ahlfors 正则曲线 Γ 上的弧长测度，那么正是这种情形.

我们知道当 Γ 是 Lipschitz 图象时是这种情形出现. 此外对 K 所作的假设和我们打算证明的不等式在旋转和平移下不变.

于是我们可以对 Lipschitz 曲线进行任意的位移. 对应的弧长测度 $d\mu$ 将一致地是"好测度"，即在这种测度下 $\|T_*^\mu f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$；常数 C 仅依赖于所用的 Lipschitz 范数.

我们将限于考虑 Radon 测度的一个子集 $\sum$；$\mu\in\sum$ 表示存在两个常数 C_1 和 C_2，使得对复平面上所有（z_0 为中心 $r>0$ 为半径）的圆盘 D 都有 $\mu(D)\leqslant C_2 r$，并且当 D 的中心 z_0 属于 μ 的支集时 $\mu(D)\geqslant C_1 r$.

命题 2 设 μ 和 ν 是属于 $\sum$ 的两个测度. 假定对所有 p（满足 $1<p<\infty$）算子 T_*^μ 在 $L^p(d\mu)$ 上有界. 那么算子 $T_*^\mu: L^p(d\mu)\to L^p(d\nu)$ 以及 $T_*^\nu: L^p(d\nu)\to L^p(d\mu)$ 连续.

命题的证明基于一系列引理，它们十分类似于第 7 章使用过的那些.

设 μ 属于 $\sum$ 并且 f 属于 $L^1(d\mu)$，定义极大算子 $M_\mu f$ 如下

$$M_\mu f(z) = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{r}\int_{|z-w|\leqslant r} |f(w)|\,d\mu(w)\right\}. \tag{7.3}$$

这个定义表现出下列特殊性：在 μ 的支集上，极大函数 $M_\mu f$ 逐点控制 $|f|$（精确到一个常数因子）. 但在 μ 的支集之外，在 $M_\mu f$ 与 f 之间再没有任何关系. 下述引理由于这个注释而变得清晰. 事

实上若 μ_1 和 μ_2 是两个属于 $\sum$ 的测度并有互不相交的支集，则不可能对所有函数 $f \in L^p(d\mu_1)$ 有 $\| f \|_{L^p(d\mu_2)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\mu_1)}$. 但由于没有 $M_{\mu_1} f \geqslant |f|$，人们可以期待对 $1 < p \leqslant \infty$ 有不等式 $\| M_{\mu_1} f \|_{L^p(d\mu_2)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\mu_1)}$.

引理 8 设 μ_1 和 μ_2 是两个属于 $\sum$ 的测度. 则对 $p > 1$，存在一个常数 $C = C(\mu_1, \mu_2, p)$，使对所有函数 $f \in L^p(d\mu_1)$ 有

$$\| M_{\mu_1} f \|_{L^p(d\mu_2)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\mu_1)}. \tag{7.4}$$

这个引理的证明是 Hardy 和 Littlewood 定理证明的改写. 为方便读者我们写出来.

我们首先注意到由于 $\mu_1 \in \sum$，次线性算子 $M_{\mu_1}: L^\infty(d\mu_1) \to L^\infty(d\mu_2)$ 是连续的. 若能证明 M_{μ_1} 从 $L^1(d\mu_1)$ 到 $L^1_{弱}(d\mu_2)$ 是连续的，那么 Marcinkiewicz 内插定理将提供所要的连续性.

为得到弱型估计，假定 $\int |f| d\mu_1 = 1$ 并用 $\lambda > 0$ 表示检验弱连续性的一个水平.

设 $m \geqslant 1$ 是一个整数（要趋向无穷并实现一个截断）. 令 $\Omega_m = \{z; |z| < m$ 并且 $M_{\mu_1} f(z) > \lambda\}$；由于 $M_\mu f$ 是下半连续函数，Ω_m 是开集.

对所有 $z \in \Omega_m$，极大函数定义本身指出存在一个中心为 z 半径为 $r(z) > 0$ 的紧圆盘 D_z 使 $\nu_1(D_z) > \lambda r(z)$；这里我们令 $\nu_1 = |f| d\mu_1$.

Besicovitch 定理（[126], p. 2）提供圆盘 D_z 的一个序列 $D_k = D_{z_k}$，可能是有限个，使 Ω_m 含于 D_k 的并集内并且所有点至多含于这些圆盘的 C_0 个之内.

由于 $\mu_2 \in \sum$，遂有

$$\mu_2(\Omega_m) \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \mu_2(D_k) \leqslant C \sum r_k < C\lambda^{-1} \sum \nu_1(D_k)$$

$$\leqslant CC_0\lambda^{-1}\nu_1(1) = CC_0\lambda^{-1}.$$

令 m 趋向于无穷即得结论.

引理 9 若 μ 属于 $\sum$,则存在一个常数 $C = C(\mu)$ 使对所有 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和所有 $r > 0$ 有

$$r\int_{|z-z_0|\geqslant r} |f(z)||z-z_0|^{-2}d\mu(z) \leqslant CM_\mu f(z_0). \tag{7.5}$$

证明是直接的:只需把 $|z-z_0|\geqslant r$ 分解成二进圆环 $2^j r \leqslant |z-z_0| < 2^{j+1}r$, 并在每一圆环上利用 $M_\mu f$ 的定义.

下列引理的意义是只需在 μ 的支集上了解了极大算子 T^μ_*,便可处处估算它.这是直观的,因为正是在支集上情况最坏.

更精确地说,我们有

引理 10 设 $\sigma\in \sum$,则存在两个常数 C_1 和 C_2(依赖于 σ 和 K)使对所有 $z\in\mathbb{C}$ 和所有紧支连续函数 f 有

$$T^\mu_* f(z) \leqslant C_1 M_\sigma(T^\sigma_* f)(z) + C_2 M_\sigma f(z). \tag{7.6}$$

为建立(7.6),先以 z_0 代替 z,左端代以 $T^\sigma_\varepsilon f(z_0)$. 我们希望得到 $|T^\sigma_\varepsilon f(z_0)|$ 的一个(关于 $\varepsilon > 0$ 一致的)上估.

用 $D(\varepsilon)$ 表示开圆盘 $|z-z_0| < \varepsilon$,而用 $D(\varepsilon/2)$ 表示半径为其一半的同心圆盘. 令 $f = f_1 + f_2$,这里若 $z\in D(\varepsilon)$,$f_1(z) = f(z)$,否则令 $f_1(z) = 0$. 那么

$$T^\sigma_\varepsilon f(z_0) = T^\sigma f_2(z_0) = \int K(z_0 - w)f_2(w)d\sigma(w).$$

再注意到对所有 $z\in D(\varepsilon/2)$ 有

$$|T^\sigma f_2(z) - T^\sigma f_2(z_0)| \leqslant C\, M_\sigma f(z_0) \tag{7.7}$$

(还可用 $M_\sigma f(z_1)$ 代替右端,其中 $z_1 \in D(\varepsilon/2)$,这个注释后面将用到).

这个不等式立刻从引理 9 和下列不等式推出

$|K(z_0, -w) - K(z,w)| \leqslant C|z - z_0| |z_0 - w|^{-2}$,当 $z \in D(\varepsilon/2)$ 且 $w \notin D(s)$ 时.

从不等式(7.7)导出

$$T^\sigma f_2(z_0) = T^\sigma f_2(z) + O(M_\sigma f)(z_0)$$
$$= T^\sigma_\varepsilon f(z) + O(M_\sigma f)(z_0),$$

最后导出

$$|T^\sigma_\varepsilon f(z_0)| \leqslant T^\sigma_* f(z) + C\, M_\sigma f(z_0), \text{对于 } z \in D(\varepsilon/2). \tag{7.8}$$

我们要比较 ε 和中心 z_0 与 σ 的支集 E 之间的距离 d.

若 $\varepsilon \geqslant 4d$,对不等式(7.8)关于 σ 在 $D(\varepsilon/2)$ 上的限制求平均. 由于 $\sum$ 的定义,$\sigma(D(\varepsilon/2))$ 和 ε 的大小是同阶的,遂得

$$|T^\sigma_\varepsilon f(z_0)| \leqslant C\, M_\sigma T^\sigma_* f(z_0) + C'\, M_\sigma f(z_0).$$

若 $\frac{d}{2} \leqslant \varepsilon < 4d$,注意到 $|T^\sigma_\varepsilon f(z_0) - T^\sigma_{4d} f(z_0)| \leqslant C\, M_\sigma f(z_0)$,就归结为前述情形.

最后若 $0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$,必然有 $T^\sigma_\varepsilon f(z_0) = T^\sigma_{d/2} f(z_0)$,这再次归结为前述情形.

返回到转移命题. 我们假定 $T^\sigma_* : L^p(d\sigma) \to L^p(d\sigma)$ 对所有 $1 < p < \infty$ 是连续的.

那么(7.6)和引理8提供了 $T^\sigma_* : L^p(d\sigma) \to L^p(d\mu)$ 的连续性. $T^\mu_* : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma)$ 的连续性在一定意义下则是前者的对偶.

由于极大算子 T^σ_* 从 $L^p(d\sigma)$ 到 $L^p(d\mu)$ 内的连续性,截断算子 $T^\sigma_\varepsilon : L^p(d\sigma) \to L^p(d\mu)$ 一致有界. 由对偶推出截断算子 $T^\mu_\varepsilon : L^q(d\mu) \to L^q(d\sigma)$ 也一致有界,这里 $1/q + 1/p = 1$. 剩下的是过渡到极大算子 T^μ_*,这还得靠一点儿"实变".

设 $\varepsilon_j > 0$ 是一个序列,使 $T^\mu_{\varepsilon_j}$ 在弱收敛的意义下收敛到一个算子,记之为 T^μ:对 $f \in L^q(d\mu)$ 和 $g \in L^p(d\sigma)$,遂有

$$\langle T^\mu f, g \rangle \doteq \lim_{j \to \infty} \langle T^\mu_{\varepsilon_j} f, g \rangle.$$

我们打算验证逐点不等式

$$T_*^\mu f(z_0) \leqslant C\, M_\sigma(T_*^\mu f)(z_0) + C_r(M_\mu |f|^r(z_0))^{1/r} \quad (7.9)$$

对 $1 < r < \infty$ 和所有属于 σ 的支集的 z_0 成立. 这个不等式结合引理 8,就保证了当 $1 < r < p < \infty$ 时 $T_*^\mu : L^p(d\mu) \to L^p(d\sigma)$ 的连续性.

为建立(7.9),仍取引理证明中用的分解 $f = f_1 + f_2$ 并保持同样的记号. 遂得对 $z \in D(\varepsilon/2)$ 有

$$T_\varepsilon^\mu f(z_0) = T^\mu f_2(z) + R_1(z) = T^\mu f(z) - T^\mu f_1(z) + R_1(z),$$

其中

$$|R_1(z)| \leqslant C\, M_\mu f(z_0).$$

于是有

$$|T_\varepsilon^\mu f(z_0)| \leqslant |T^\mu f(z) + T^\mu f_1(z)| + C\, M_\mu f(z_0), \quad (7.10)$$

我们计算(7.10)右端对 σ 在 $D(\varepsilon/2)$ 上的限制求平均. 由于 z_0 属于 σ 的支集,$\sigma(D(\varepsilon/2))$ 跟 ε 大小同阶,故有

$$|T_\varepsilon^\mu f(z_0)| \leqslant C\, M_\sigma(T^\mu f)(z_0) + C\, M_\mu f(z_0) + R_\varepsilon(z_0), \quad (7.11)$$

其中

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(z_0) &= \frac{1}{\sigma(D(\varepsilon/2))} \int_{D(\varepsilon/2)} |T^\mu f_1(z)|\, d\sigma(z) \\ &\leqslant \left[\frac{1}{\sigma(D(\varepsilon/2))} \int_{D(\varepsilon/2)} |T^\mu f_1(z)|^r d\sigma(z)\right]^{1/r} \\ &\leqslant C(M_\mu |f|^r(z_0))^{1/r}. \end{aligned}$$

最后一个不等式是由 $T_*^\mu : L^r(d\mu) \to L^r(d\sigma)$ 的连续性得到的.

8. Ahlfors 正则曲线的 Calderon-Zygmund 分解

我们回忆起 Γ 是复平面上一条过无穷远点的可度长定向 Jordan 曲线. 以 $d\sigma$ 记 Γ 上的“弧长”测度,它由 $\int_\Gamma f d\sigma =$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(z(s))ds$ 定义，其中 $z(s)$ 显然是 Γ 用弧长作参数的参数表示.

以下总假定存在一个常数 $C \geqslant 2$ 使对复平面上半径为 r 的所有圆盘 D 有

$$\sigma(D) \leqslant Cr. \tag{8.1}$$

从而 σ 属于上面定义的类 $\sum$.

本节的目的是证明所有在 Ahlfors 意义下的正则曲线在无论多大的范围内都允许一个好的 Lipschitz 复件，其品质是一致的.

命题 3 存在一个常数 M 和一个常数 $\nu > 0$，它们仅依赖于出现在(8.1)中的常数 C 使下列性质是具备的：

对所有长度为 $|I|$ 的区间 $I \subset \mathbb{R}$，存在一个紧子集 $E \subset I$，一个 Lipschitz 函数 $a_I(x)$ 和一个标准正交系 R_I，使得当用 T_I 记 $a_I(x)$ 在 R_I 内的图象并用 $z_I(s)$ 记 Γ_I 的以弧长作参数的参数表示时有

$$\| a'_I \|_{\infty} \leqslant M, \tag{8.2}$$

$$|E| \geqslant \nu |I|, \tag{8.3}$$

和

$$z_I(s) = z(s), \text{对所有 } s \in E. \tag{8.4}$$

这个命题的证明基于旭日引理(第 9 章引理 6)的一个变体.

引理 11 设 $I = [a,b]$ 是实数的一个区间，其长度为 $|I|$，$f: I \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足 $f(b) - f(a) = l > 0$. 则存在一个紧子集 $E \subset I$ 使

若 $x \in E, x' \in E$ 且 $x \leqslant x'$，则有

$$f(x') - f(x) \geqslant \frac{l}{2|l|}(x' - x), \tag{8.5}$$

$$|f(E)| \geqslant \frac{l}{2}. \tag{8.6}$$

引理 11 意味着如果 f 浮动总量显示一个结果 $l>0$，那么必定在 I 的一个可觉查的部分上至少以等于 $l/2|I|$ 的斜率递增，所谓可觉查即(8.6) 成立.

在这个引理的应用中，函数 $f(x)$ 还是 Lipschitz 的并满足 $\|f'\|_\infty \leqslant 1$. 那么(8.6) 将蕴涵 $|E| \geqslant |f(E)| \geqslant l/2$. 后面，将延拓 f 在 E 的限制成一个定义在全直线上的函数，要求 g 在与 E 邻接的每个区间上是仿射的(在余下的每条半直线上有形式 $\frac{l}{2|I|}x + c$). 那么显然有

$$g(x') - g(x) \geqslant \frac{l}{2|I|}(x' - x)，对所有 x \in \mathbb{R}$$

$$和所有 x' \geqslant x， \tag{8.7}$$

$$g(x) = f(x)，若 x \in E. \tag{8.8}$$

回到命题 3 的证明.

设 $I=[a,b]$，$K \subset \Gamma$ 是 Γ 的由 $z(a)$ 和 $z(b)$ 界定的弧，而 d_K 是紧集 K 的直径. 由于 Γ 是一条 Ahlfors 正则曲线，我们有 $|I| \leqslant Cd_K$. 设 a_1 和 b_1 是 I 的使 $|z(b_1) - z(a_1)| = d_K$ 的两个点. 由于 $|z(b_1) - z(a_1)| \leqslant b_1 - a_1$，遂有 $b_1 - a_1 \geqslant c(b-a)$ 对某个 $c>0$ 成立. 我们把区间 I 用$[a,b_1]$ 代之：将在$[a_1,b_1]$ 内找 E，并忘掉下标而令 $a=a_1$，$b=b_1$，以下即可假定 $|z(b) - z(a)| \geqslant c'(b-a)$，$c'>0$ 是一个常数.

进行一个位移(先一个旋转再一个平移) 即可归结为下列情形：$z(a)=0$，$z(b)=l \geqslant c'(b-a)>0$.

最后令 $z(s)=x(s)+iy(s)$，以便对函数 $x(s)$ 应用引理 11.

于是存在一个递增函数 $\xi(s)$ 和一个常数 $c''>0$ 使 $\xi(s') - \xi(s) \geqslant c''(s'-s)$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 和所有 $s'>s$ 成立. 此外若 $s \in E$，则 $\xi(s)=x(s)$，这里 $|E| \geqslant \nu|I|$，$\nu>0$ 是一个常数. 当 $z(s)=x(s)+iy(s)$ 时，令 $\zeta_I(s)=\xi(s)+iy(s)$. s 并不刚好是由 $\zeta_I(s)$ 参数表示的曲线上的弧长. 但由 $\zeta_I(s)$ 参数表示的曲线 Γ_I 是一个 Lipschitz 函数的图象并且当 $s \in E$ 时有 $\zeta_I(s)=y(s)$. 由 $\xi(s)$ 的构

造知 $c''(s'-s) \leqslant \xi(s') - \xi(s) \leqslant s'-s$，从而 Γ_I 上的弧长 t 和参数 s 有关系 $c_1(s'-s) \leqslant t'-t \leqslant C_2(s'-s)$，其中 $C_2 > C_1 > 0$ 是两个常数.

剩下的只是当 $s \notin E$ 时以下列方式修改 Γ_I：对所有与 E 邻接的区间 $]s_j, s_j'[$，由 $z_j = z(s_j)$ 和 $z_j' = z(s_j')$ 界定的 Γ 和 Γ_I 的弧长相同. 这两个弧长的大小的阶都是 $s_j' - s_j$ 或 $x_j' - x_j$（其中 $x_j = x(s_j)$，$x_j' = x(s_j')$）.

这个修改十分简单，只需当 $x_j \leqslant x \leqslant x'_j$ 时，用折线 $z_j w_j z'_j$ 代替 Γ_I，其中 $w_j = v_j + iv_j$，$v_j = \dfrac{1}{2}(x_j + x'_j)$，而 v_j 适当选取. 这样修改以后，我们没有改变 Γ_I 的 Lipschitz 特征，并且命题证毕.

9. G. David 定理的证明

设 Γ 是在 Ahlfors 意义下的正则曲线，用 $K(z)$ 表示一个 $\mathbb{C}^*$ 内的 -1 阶齐次的奇的并且无穷可导的核. 我们知道，若 $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数，满足 $\|a'\|_\infty \leqslant M$，那么核

$$K(a; s, t) = K(s + ia(s) - t - ia(t)), s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$$

定义 $L^p(\mathbb{R})$ 上的一个连续线性算子，$1 < p < \infty$，并且这个算子的范数仅依赖于 a 的斜率的界 M. 令 $z(s) = s + ia(s)$，$s \in \mathbb{R}$，进而注意到同样的结论对 $K(\lambda(z(s) - z(E)))$ 亦成立，这里 $|\lambda| = 1$；这仅仅是由于 $K(z)$ 和 $K(\lambda z)$ 具有同样的性质.

于是第 7 章的 Calderon-Zygmund 算子的一般理论告诉我们相应于 $K(a; s, t)$ 的极大算子同样在 $L^p(\mathbb{R})$ 上有界. 这个极大算子不是我们前节所考虑的那个极大算子，不过引理 10 允许从一个过渡到另一个.

最后，若 μ 是一条 Lipschitz 曲线上的弧长测度，算子 T_*^μ 从 $L^p(d\mu)$ 到 $L^p(d\mu)$ 有界，且算子范数仅依赖于 M（和 K）.

利用命题 2，我们可以转移这些估计. 设 Γ 是一条 Ahlfors 正

则曲线,而 σ 是 Γ 的弧长测度,那么有

$$\| T_*^{\mu}(f) \|_{L^p(d\sigma)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\mu)} \tag{9.1}$$

和

$$\| T_*^{\sigma}(f) \|_{L^p(d\mu)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\sigma)}, \tag{9.2}$$

其中 $C = C(K, p, M, \Gamma)$.

我们希望由此推出

$$\| T_*^{\sigma}(f) \|_{L^p(d\sigma)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\sigma)}, \tag{9.3}$$

为此,先回忆一下 Burkholder 和 Gundy 引理,并把它表示成与在第 7 章用过的稍微不同的形式.

引理 12 设 p 是一个指数($1 < p < \infty$),R 是一个正数,又设 u,v 是两个单实变量,取正值(或零)且满足下列条件的函数

$$u(x) \text{ 限制在 } |x| \geqslant R \text{ 上时属于 } L^p. \tag{9.4}$$

存在一个系数 $\beta, 0 \leqslant \beta < 1$,一个 $\varepsilon > 0$ 和一个 $\gamma(\varepsilon) > 0$ 使 $\beta < (1+\varepsilon)^{-1}$ 并对所有 $\lambda > 0$,有

$$\begin{aligned} &| \{ x \in \mathbb{R}; u(x) > \lambda + \varepsilon\lambda \text{ 且 } v(x) \leqslant \gamma(\varepsilon)\lambda \} | \\ &\qquad \leqslant \beta | \{ x \in \mathbb{R}; u(x) > \lambda \} |, \end{aligned} \tag{9.5}$$

则 u 属于 $L^p(\mathbb{R})$ 且有

$$\| u \|_p \leqslant ((1 + \varepsilon^{-p} - \beta))^{-1/p} (\gamma(\varepsilon))^{-1} \| v \|_p. \tag{9.6}$$

证明跟第 7 章所给的是一样的,尽管假设以稍许不同的方式表示出来.

在我们所处理的应用中,f 是一个有紧支集的连续函数(在复平面上定义),$u(s) = (T_*^{\sigma} f)(z(s))$ 而 $v(s) = (M_0 |f|^r(z(s)))^{1/r}$,其中 $1 < r < p$. 我们记得测度 σ 是 Ahlfors 曲线 Γ 的弧长测度,$z(s)$ 是 Γ 的参数表示(以弧长作参数).

如果我们致力验证了(9.5),David 定理将从(9.6)得到.

首先注意,从构造即知 $u(s)$ 是下半连续的且在无穷远点是零. 因此由 $u(s) > \lambda$ 定义的集合 Ω 是一个有界开集,从而是互不相

交的区间$]a_j,b_j[$的并集.

按照习惯,用E_j表示属于$]a_j;b_j[$且使$u(s)>\lambda+\varepsilon\lambda$的$s$的集合. 可以限于下列情况:存在一个$\xi\in]a_j,b_j[$使$v(\xi)\leqslant\gamma\lambda$,要证$|E_j|\leqslant\beta(b_j-a_j)$. 把所有这些不等式相加,显然就得到(9.5).

一如既往,令$f=f_1+f_2$,这里当$|z-z(a_j)|\leqslant 2l_j(l_j=b_j-a_j)$时$f_1(z)=f(z)$,否则$f_1(z)=0$. 那么重复(7.6)的证明即知若$|z-z(a_j)|\leqslant l_j$且$|z'-z(a_j)|\leqslant l_j$,则有

$$T_*^\sigma f_2(z)\leqslant T_*^\sigma f(z(a_j))+CM_\sigma f(z'). \tag{9.7}$$

由Ω的定义即知$T_*^\sigma f(z(a_j))\varepsilon\lambda$,若取$z'=z(\xi)$,即得,当$z=z(s),a_j\leqslant s\leqslant b_j$时有

$$T_*^\sigma f_2(z)\leqslant\lambda+C_0\gamma\lambda. \tag{9.8}$$

还剩下估计$T_*^\sigma f_1(z)$,这要靠用一个"Lipschitz 近似"Λ逼近正则曲线Γ. 更准确地说,存在紧子集$K_j\subset[a_j,b_j]$使$|K_j|\geqslant\gamma(b_j-a_j)$,又存在 Lipschitz 曲线$\Lambda_j$,其弧长参数表示为$\zeta_j(s)$,对$s\in K_j$有$\zeta_j(s)=z(s)$.

用$d\mu$表示Λ_j的弧长测度,若用D_j表示圆盘$|z-z(a_j)|\leqslant 2l_j$并且$|z'-z(a_j)|\leqslant l_j$,那么算子M_σ的定义给出

$$\int|f_1|^r d\sigma=\int_{D_j}|f|^r d\sigma\leqslant C'l_j M_\sigma|f|^r(z'). \tag{9.9}$$

仍取$z'=z(\xi)$,那么由(9.9)推出

$$\int_{K_j}((T_*^\sigma f_1)(z(s)))^r ds\leqslant C''l_j\gamma^r\lambda^r. \tag{9.10}$$

取$\gamma=\gamma(\varepsilon)$充分小,以使$C_0\gamma<\varepsilon/2$和$C''\gamma^r\leqslant\nu/2(\varepsilon/2)^r$. 由于这些选择和(9.10),使$T_*^\sigma f_1(z(s))\geqslant\lambda\varepsilon/2$的$s$的集合$R_j\subset K_j$的测度不超过$\gamma l_j/2$.

集合$\Delta_j=K_j\backslash R_j$满足$|\Delta_j|\geqslant\gamma l_j/2$,而若$s\in\Delta_j$,则有$T_*^\sigma f_1(z(s))\varepsilon\lambda\varepsilon/2$和$T_*^\sigma f_2(z(s))\leqslant\lambda+\lambda\varepsilon/2$,这就蕴涵$T_*^\sigma f(z(s))\leqslant\lambda+\varepsilon\lambda$.

因而数$\beta\in[0,1[$等于$1-\gamma/2$,即得(9.5),进而 David 的定

理便被建立.

10. 补充

G. David 和 S. Semmes 打算把有关可度长曲线的 G. David 定理推广到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的超曲面的情形.

这里是由 S. Semmes 得到的一个结果([212]).

考虑一个定向曲面 $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$,它把$\mathbb{R}^{n+1}$ 分成两个(开的)连通分支 Ω_1 和 Ω_2,并设存在一个常数 $K > 1$ 使对所有 $x \in S$ 和所有 $R > 0$ 有

$$K^{-1}R^n < \sigma\{|y-x| \leqslant R\} \leqslant K R^n, \qquad (10.1)$$

其中 σ 是 S 上的曲面测度.

第二个假设是所谓由外部的可接近性,假定存在一个常数 $\delta > 0$,使得对所有 $x \in S$ 和所有 $R > 0$,可以找到一个 $y \in \Omega_1$ 和一个 $z \in \Omega_2$ 满足 $|x-y| < R$, $|x-t| < R$,而以 y 为中心和以 z 为中心且半径为 δR 的两个球体完全含于 Ω_1 和 Ω_2.

那么若 $P(x)$ 是一个 l 阶齐次的奇多项式,又若 $k(x) = P(x)|x|^{-n-l}$,则由

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_S k(x-y)f(y)d\sigma(y) \qquad (10.2)$$

定义的算子在 $L^2(d\sigma)$ 内有界.

跟一维情形相反,这个表述不是最佳的,并且人们怀疑能够得到加在 S 的几何上并蕴涵所有算子(10.2)的连续性的必要充分条件.

第13章 多重线性算子

1. 引 言

本章贡献于多重线性算子(或运算)的构造和分析. 这些运算是一种算法,从 $k+1$ 个全部定义在$\mathbb{R}^n$ 上的函数 $a_1(x),\cdots,a_k(x)$, $f(x)$ 出发,得到同样定义在$\mathbb{R}^n$ 上的一个新函数 $g(x)$. 我们感兴趣的运算类似于逐点乘法 $g(x)=a_1(x)\cdots a_k(x)f(x)$,并且我们要求它们满足 Hölder 不等式

$$\| g \|_r \leqslant C \| a_1 \|_{p_1} \cdots \| a_k \|_{p_k} \| f \|_q,$$

其中 $1<r<\infty, 1<p_1\leqslant\infty,\cdots,1<p_k\leqslant\infty$,并且 $1<q<\infty$,这些指数由等式 $1/r=1/p_1+\cdots+1/p_k+1/q$ 联系. 此外,我们将要求让 g 对应序列$(a_1,\cdots,a_k,f)$ 的这种算法完全像普通乘法一样,跟对 $a_1,\cdots,a_k$ 和 f 同时施行的平移和正展缩是相容的. 假如这两个条件是满足的(即 Hölder 不等式和交换规则),那么算法完全由多重线性象征 $\tau(\xi,\eta)\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nk})$ 定义,其中 $\xi\in\mathbb{R}^n,\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_k)\in\mathbb{R}^{nk}$,并且有

$$g(x)=(2\pi)^{-n(k+1)}\iint e^{ix\cdot(\xi+\tilde{\eta})}\tau(\xi,\eta)\hat{f}(\xi)\hat{a}(5\eta)d\xi d\eta, \quad (1.1)$$

其中 $\hat{a}(\eta)=\hat{a}_1(\eta_1)\cdots\hat{a}_n(\eta_n), d\eta=d\eta_1\cdots d\eta_k, \tilde{\eta}=\eta_1+\cdots+\eta_k$.

若 $\tau(\xi,\eta)=1$,就重新回到普通乘积.

必要条件 $\tau\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nk})$ 对于(1.1) 定义一个具有跟普通乘积同样的连续性(即上面指出的带常数的 Hölder 不等式) 的多重线性算子不是充分的.

多重线性运算参与到全纯泛函的研究中. 这些全纯泛函,举例

来说，出现在反问题中. 即这样的 其中未知函数 $a(x)$（比如地球内部的电阻率）作为一个偏微分方程的系数出现. 假定经过适当的测量，建立算子 $T(a)[f]=g$，它允许在适当的空间里解这个偏导数方程. 反问题在于从对算子 $T(a)\in\mathscr{L}(H,H)$ 的认识求 $a(x)$，其中 H 是一个 Hilbert 空间. 在许多情形，$T(a)$ 对 a 的依赖性是全纯的，因而使得应用隐函数定理具有吸引力. 我们的全纯泛函 $T(a)$（比如在 0 的邻域内）写成

$$T(a)=T_0+T_1(a)+\cdots+T_k(a,\cdots,a)+\cdots, \quad (1.2)$$

其中 $T_0\in\mathscr{L}(H,H)$ 不依赖于 a，$T_1(a)$ 关于 a 是线性的，它在 $\mathscr{L}(H,H)$ 内取值，… 最后 T_k 是"k 阶齐次多项式"，即在 $\mathscr{L}(H,H)$ 内取值的多重线性算子 $\widetilde{T}_k(a_1,\cdots,a_k)$ 在对角上的限制.

为了能够应用隐函数定理，适当的办法是安排一个 Banach 空间 B，使得 a 在 B 里的范数跟算子 $T_1(a):H\to H$ 的范数等价. 在下面的例子中，排除了下列可能性，即使 $T_1(a)\in\mathscr{L}(H,H)$ 对应 a 的映射从 B 到 $\mathscr{L}(H,H)$ 上是满射. 事实上，$T(a)$ 的集合表示 Banach 空间 $\mathscr{L}(H,H)$ 中的一个闭流形 V，而反问题是把 a 当作这个流形 V 上的一个全纯泛函予以研究.

诚如读者所猜到的，问题在于发现 Banach 空间 B，它允许解决反问题（在方才叙述的意义下），那么最常出现的情况是，$T(a)$ 仅定义在一个子空间 $A\subset B$ 上. 这个子空间对应于在一开始为使 (1.2) 的提法有意义而作的正则性的多余假设.

于是人们准备估计式 $\|\widetilde{T}_k(a_1,\cdots,a_k)\|_{\mathscr{L}(H,H)}\leqslant C^k\|a_1\|_A\cdots\|a_k\|_A$. 这个估计表明 $T(a)$ 在 Banach 空间 A 的 0 的一个领域内是全纯的. 但若 $A\neq B$，显然这个估计不是最佳的.

最佳的估计是

$$\|\widetilde{T}_k(a_1,\cdots,a_k)\|_{\mathscr{L}(H,H)}\leqslant C^k\|a_1\|_B\cdots\|a_k\|_B. \quad (1.3)$$

人们不能走得更远，这是因为对两个常数 $C'\geqslant C>0$，有 $C\|a\|_B\leqslant\|T_1(a)\|_{\mathscr{L}(H,H)}\leqslant C'\|a\|_B$. (1.3) 成立时，我们就说 B 是相应于全纯泛函 $T(a)$ 的全纯空间. 正如我们刚指出的那样，

如果不知道为算子$T(a)$的流形V提供参数表示的全纯空间，就不能着手解决反问题.

设$H = L^2(\mathbb{R}^n)$，$B = L^\infty(\mathbb{R}^n)$，并设所提的问题有一个几何意义，即所有写出的算子与平移以及尺度变换可交换. 在这种情形，我们致力构造的多重线性算子

$\widetilde{T}_k(a_1, \cdots, a_k)[f] = g$，$a_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\cdots a_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，$g \in L^2(\mathbb{R}^n)$，由(1.1)提供. 或者，至少在对$a_j$，$1 \leqslant j \leqslant k$作了补充假设以致允许写出(1.1)时，它们应由(1.1)提供. 这些假设是a_j属于 Wiener 代数$A(\mathbb{R}^n)$，$A(\mathbb{R}^n)$由$L^1(\mathbb{R}^n)$的函数的 Fourier 变换组成. 从$A(\mathbb{R}^n)$过渡到$L^\infty(\mathbb{R}^n)$的问题留下重大的困难，这是因为我们还仅仅建立了加于多重线性象征以保证 Hölder 不等式成立的充分条件的部分结果.

为证明这些条件实际上是充分的，我们应用 David 和 Journé 的$T(1)$定理.

这个同样的步骤将在第 14 章处理 Kato 问题时还要用到，该问题涉及到散度形式增生微分算子的平方根的定义域.

2. 多重线性算子的一般理论

以回顾 Wiener 代数$A(\mathbb{R}^n)$的定义和性质作为开始. 它由函数$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$的 Fourier 变换$\hat{f}$组成，由定义，$\hat{f}$在$A(\mathbb{R}^n)$内的范数就是f在$L^1(\mathbb{R}^n)$内的范数. 那么$A(\mathbb{R}^n)$是$C_0(\mathbb{R}^n)$的(稠密)子代数，$C_0(\mathbb{R}^n)$是在无穷远点为零的$\mathbb{R}^n$上的所有连续函数的代数. 此外$g \in A(\mathbb{R}^n)$的范数在平移和展缩下是不变的.

Wiener 代数$A(\mathbb{R}^n)$以自然的方式成了跟平移以及展缩可交换的多重线性算子理论的出发点.

事实上，设$R_x : A(\mathbb{R}^n) \to A(\mathbb{R}^n)$是$x$平移算子；即$R_x f(y) = f(y - x)$. 同样，对$\delta > 0$，$D_\delta : A(\mathbb{R}^n) \to A(\mathbb{R}^n)$由$D_\delta f(y) = f(\delta^{-1} y)$定义. 把$A(\mathbb{R}^n)$记为$A$，$L^2(\mathbb{R}^n)$记为$L^2$.

命题 1 设$\pi: a^k \times L^2 \to L^2$是连续的$(k+1)$重线性算子并且对所有向量$x \in \mathbb{R}^n$,对$a_1 \in A, \cdots, a_k \in A$和$f \in L^2$满足

$$\pi(R_x a_1, \cdots, R_x a_k, R_x f) = R_x \pi(a_1, \cdots a_k, f), \tag{2.1}$$

则存在一个函数$\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^{n(k+1)})$,称之为$\pi$的象征,使

$$\pi(a,f) = (2\pi)^{-n(k+1)} \iint e^{ix\cdot(\xi+\tilde{\eta})} \times \tau(\eta,\xi)\hat{a}(\eta)\hat{f}(\xi)d\eta d\xi, \tag{2.2}$$

其中$a(x) = a_1(x_1)\cdots a_k(x_k), x_1 \in \mathbb{R}^n, \cdots, x_k \in \mathbb{R}^n, \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$, $\tilde{\eta} = \eta_1 + \cdots + \eta_k$.

另外,若π与展缩在下列意义下可交换

$$\pi(D_\delta a_1, \cdots, D_\delta a_k, D_\delta f) = D_\delta \pi(a_1, \cdots, a_k, f), \text{对所有 } \delta > 0, \tag{2.3}$$

则τ是0阶齐次的,

$$\tau(\delta\eta, \delta\xi) = \tau(\eta, \xi), \text{对所有 } \delta > 0. \tag{2.4}$$

反之,若$\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^{n(k+1)})$,则(2.2)定义一个在(2.1)意义下与平移可交换的多重线性算子,且有

$$\| \pi(a,f) \|_2 \leqslant \| \tau \|_\infty \| a_1 \|_A \cdots \| a_k \|_A \| f \|_2. \tag{2.5}$$

这意味着若用$A(\mathbb{R}^n)$代替$C_0(\mathbb{R}^n)$,多重线性理论是平淡的,深刻的问题是推广(2.5),用$\| \tau \|_E \| a_1 \|_\infty \cdots \| a_k \|_\infty \| f \|_2$代替它的右端,其中$\| \tau \|_E$是一个适当的范数(必然比$L^\infty$范数更精密).另外容易验证$\| \tau \|_E$不可能是$\tau$的$L^\infty$范数.

为建立(2.2),我们进行下列启发性的探索,我们干脆用$e^{i\alpha_1 x}$代替$a_1(x), \cdots$,用$e^{i\alpha_k \cdot x}$代替$a_k(x)$,其中$\alpha_1 \in \mathbb{R}^n, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$,并考虑算子$T_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$,其定义是

$$T_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}(f) = \exp(-i(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) \cdot x) \times \pi[e^{i\alpha_1 \cdot x}, \cdots, e^{i\alpha_k \cdot x}, f]. \tag{2.6}$$

由于函数$e^{i\alpha \cdot x}, \alpha \in \mathbb{R}^n$,不属于$A(\mathbb{R}^n)$,这没有意义.不过,对所

有 $\delta > 0$，函数 $e^{i\alpha\cdot x}e^{-\delta|x|^2}$ 属于 $A(\mathbb{R}^n)$，并且它们的范数是 1. 如此看来，被禁止的情形是被允许的情形的极限.

继续大胆设想. 由于(2.1)，算子 $T_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}: L^2 \to L^2$ 跟平移可交换，借助 Fourier 变换，它由一个乘子 $\tau(\alpha_b\cdots,\alpha_k,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^{n(k+1)})$ 定义. 姑且认为 $f(x) = \exp(i\xi\cdot x)$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，令 $\chi_j(x) = \exp(i\alpha_j\cdot x)$，则有

$$\pi(\chi_1,\cdots,\chi_k,f) = \tau\chi_1\cdots\chi_k f. \qquad (2.7)$$

((2.7)右端是 $k+2$ 个函数 $\tau,\chi_1,\cdots,\chi_k$ 和 f 的普通乘积.) 只需再对(2.7)"进行线性运算"即得(2.2).

我们过渡到(2.2)的"严肃的"证明. 实际情况是，$a_1 \in A(\mathbb{R}^n),\cdots,a_k \in A(\mathbb{R}^n), f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 为分析 π，引进多重线性齐式 $J:(L^1(\mathbb{R}^n))^k \times (L^2(\mathbb{R}^n))^2 \to \mathbb{C}$，其定义是

$$J(b_1,\cdots,b_k,f,g) = \int\pi(\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_k,\hat{f})\hat{g}dx, \qquad (2.8)$$

其中 $\hat{b}_1$ 是 b_1 的 Fourier 变换，等等. 于是有

$$|J(b_1,\cdots,b_k,f,g)| \leqslant C\|b_1\|_1\cdots\|b_k\|_1\|f\|_2\|g\|_2, \qquad (2.9)$$

而平移不变性给出，若 $\chi(x) = \exp(i\omega\cdot x), \omega \in \mathbb{R}^n$，则有

$$J(\chi b_1,\cdots,\chi b_k,\chi f,\bar{\chi}g) = J(b_1,\cdots,b_k,f,g). \qquad (2.10)$$

为走得更远，把 J 限制在 $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))^{k+2}$ 上，并利用 Schwartz 核定理提供的多重线性形式的分析. 于是存在一个属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n(k+2)})$ 的分布 S 使得，当 $b_1\cdots,b_k,f$ 和 g 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 时有

$$J(b_1,\cdots,b_k,f,g) = \langle S, b_1\otimes\cdots\otimes b_k\otimes f\otimes g\rangle. \qquad (2.11)$$

利用等式(2.10)则得 $S = \tilde{\chi}S$，这里 $\tilde{\chi}\cdot(x_1,x_k,x_{k+1},x_{k+2}) = \chi(x_1+\cdots+x_{k+1}-x_{k+2}), x_1\in\mathbb{R}^n,\cdots,x_{k+2}\in\mathbb{R}^n$. 分布 S 必然由 $\tilde{\chi}=1$ 支撑，而不论 χ 如何选取. 遂得 S 是一个由 $x_{k+2} = x_1+\cdots+x_{k+1}$ 支撑的单层分布.

最后存在变量 $x_1,x_2,\cdots x_{k+1}$ 的一个分布 σ 使得 S 是这个分布在一个映射之下的象，该映射使 $(x_1,\cdots,x_{k+1},x_1+\cdots+x_{k+1})$ 对应

于$(x_1,\cdots,x_{k+1})$.

我们方才证明了等式

$$J(b_1,\cdots,b_k,u,\sigma)=\int\cdots\int b_1(x_1)b_2(x_2)\cdots b_k(x_k)u(x_{k+1})$$
$$\times v(x_1+\cdots+x_{k+1})d\sigma(x_1,\cdots,x_{k+1}),$$

其中我们把对于一个测度的积分的通常写法推广到了分布.

我们要表达J的连续性,为此考虑一个参数$\delta>0$(其作用是趋向于0)和由Gauss函数给的特殊选取

$$b_1(x_1)=\delta^{-k}\exp\left[-\frac{|x_1-a_1|^2}{\delta^2}\right],\cdots$$
$$\cdots b_k(x_k)=\delta^{-n}\exp\left[-\frac{|x_k-a_k|^2}{\delta^2}\right],$$

其中$a_1\in\mathbb{R}^n,\cdots,a_k\in\mathbb{R}^n$,

$u(x_{k+1})=\delta^{-n/2}\exp\left[-\frac{|x_{k+1}-a_{k+1}|^2}{\delta^2}\right]$,最后令

$v(x_{k+2})=\delta^{-n/2}\exp\left[-\frac{|x_{k+2}-a_{k+2}|^2}{\delta^2}\right]$,其中$a_{k+2}=a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$. 在这些选择之下,$b_1(x_1)b_2(x_2)\cdots u(x_{k+1})v(x_1+\cdots+x_{k+1})$等于$\delta^{-n(k+1)}\exp\left[-\frac{Q(x-a)}{\delta^2}\right]$,其中$Q(x)$是二次齐式

$|x_1|^2+\cdots+|x_{k+1}|^2+|x_1+\cdots+x_{k+1}|^2$,而$a=(a_1,\cdots,a_{k+1})$,$x=(x_1,\cdots,x_{k+1})$.

最后$J(b_1,\cdots,b_k,u,v)$是分布$\sigma\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n(k+1)})$和单位的一个逼近$G_\delta$(忽略一个仅依赖于$n$和$k$的常数)的卷积. 于是表达$J$的连续性的不等式写成$\|\sigma*G_\delta\|_\infty\leqslant C$, 过渡到极限即得$\sigma\in L^\infty(\mathbb{R}^{n(k+1)})$. 这就建立了(2.2),并且$\tau$正是$\sigma$.

反之,从(2.2)出发并来建立如此定义的运算的连续性. 仍考虑形式$\int\pi(a,f)g\,dx$,$g\in L^2(\mathbb{R}^n)$,这个形式等于

$$\int\hat{g}(-\xi-\eta_1-\cdots-\eta_k)\tau(\eta,\xi)\hat{a}_1(\eta_1)\cdots\hat{a}_k(\eta_k)\hat{f}(\xi)d\eta d\xi.$$

先对 ξ 积分并利用 Cauchy-Schwartz 不等式，再对 $\eta_1,\cdots,\eta_k$ 积分．连续性据此建立，而(2.1)的验证是平凡的．

困难的情形是，人们致力于用在$\mathbb{R}^n$上连续且在无穷远点为零的函数的代数 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 代替 Wiener 的代数 $A(\mathbb{R}^n)$，在处理这一情形之前，我们要指出如何用有界复 Radon 测度 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换的代数 $B(\mathbb{R}^n)$ 代替 $A(\mathbb{R}^n)$．我们沿用从 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 过渡到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的类似步骤．

设 μ 是一个有界 Radon 测度．我们说一个有界 Radon 测度的序列 $\mu_j, j\in\mathbb{N}$，狭义趋向于 μ，如果对所有有界连续函数 $b(x)$，有 $\lim\limits_{j\to\infty}\int b(x)d\mu_j(x)=\int b(x)d\mu(x)$．这归结为对在无穷远点为零的连续函数写出同一条件和附加条件

$$\int_{\{|x|\geqslant T\}} d|\mu_j|\leqslant\varepsilon(T),$$

其中 $\varepsilon(T)$ 当 T 趋向于无穷时关于 j 一致地趋于 0．

为了把多重线性算子 $\pi: A^k\times L^2\to L^2$ 扩张到 $(B(\mathbb{R}^n))^k\times L^2(\mathbb{R}^n)$，我们应当利用连续延拓．代数 A 是 $B=B(\mathbb{R}^n)$ 的闭向量子空间(实际上是一个理想)．而当利用狭义收敛概念时 A 变得在 B 内稠密．我们说 A 的一个函数序列 $a_m, m\in\mathbb{N}$，狭义收敛到 $b\in B$，如果 Fourier 变换 $\hat{a}_m$ 狭义收敛到 $\hat{b}$．

我们对象征附加的补充性质是：若当 m 趋向于无穷时，$\eta_{j,m}\to\eta_j\in\mathbb{R}^n$，则 $\tau(\eta_{1,m},\cdots,\eta_{k,m},\xi-\eta_{1,m}-\cdots-\eta_{k,m})$(关于 ξ 几乎处处)趋向于 $\tau(\eta_1,\cdots,\eta_k,\xi-\eta_1-\cdots-\eta_k)$．例如当 $\tau(\eta,\xi)$ 在挖掉(0, 0)的$\mathbb{R}^{nk}\times\mathbb{R}^n$上连续时，上述性质具备．

我们指出如果这个连续性满足，则有

$$\lim_{m\to\infty}\|\pi(b,f)-\pi(a_m,f)\|_2=0, \tag{2.12}$$

其中 $f\in L^2, a_m\in A^k, b\in B^k$，并且 a_m 狭义收敛到 b．

自此，(2.12)将用来定义 $\pi(b,f)$．

回到(2.2)，用 X_η 表示逐点乘以 $e^{i\tilde{\eta}\cdot x}$ 的乘法算子，$\tilde{\eta}=\eta_1+\cdots$

$+\eta_k, \eta=(\eta_1,\cdots,\eta_k)\in\mathbb{R}^{nk}$，而用 M_η 表示卷积算子，在 Fourier 变换之后，这相当乘以 $\tau(\eta,\xi-\tilde{\eta})$ 的乘法. 于是

$$\pi(a,f)=(2\pi)^{-nk}\int M_\eta X_\eta(f)\hat{a}(\eta)d\eta.$$

由于对象征 τ 所作的连续性假设，由 $M_\eta X_\eta(f)$ 给出的 $\eta\in\mathbb{R}^n$ 的在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 内取值的函数是连续且有界的. 最后(2.12)从狭义收敛的定义得到，这个定义同样适用于在可分 Hilbert 空间取值的有界连续函数.

在结束本节前，我们叙述几个有关算子 $\pi(a_1,\cdots,a_k,f)$ 的集合 $\Gamma_k(k\in\mathbb{N})$ 的易于得到的结果，其中，我们把 $a_1,\cdots,a_k$ 固定在 Wiener 代数 A 或代数 B 中，并且把多重线性算子作用在 $f\in L^2$ 上. 那么若 T 属于 Γ_k，其转置 ${}^tT$ 亦然.

事实上，若 f 和 g 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，则有

$$\begin{aligned}\int T(f)g\,dx &= (2\pi)^{-n(k+1)}\iint \hat{g}(-\xi-\tilde{\eta})\hat{f}(\xi)\hat{b}(\eta)\tau(\eta,\xi)d\eta d\xi\\ &= (2\pi)^{-n(k+1)}\iint \hat{g}(\xi)\hat{f}(-\xi-\tilde{\eta})\hat{b}(\eta)\tau(\eta,-\xi-\\ &\quad -\tilde{\eta})d\eta d\xi,\end{aligned}$$

因为 T 的象征 $\sigma(\eta,\xi)$ 是 $\tau(\eta,-\xi-\tilde{\eta})$.

还注意到若 T_1 属于 Γ_k 并且 T_2 属于 Γ_l，则 $T_3=T_1\cdot T_2$ 属于 Γ_{k+l}. 事实上，T_3 的象征 $\tau_3(\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_l)$ 由乘积 $\tau_1(\xi+\beta_1+\cdots+\beta_l,\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\tau_2(\xi,\beta_1,\cdots,\beta_l)$ 给定. 验证是直接的并且留给读者.

3. 多重线性算子连续性的一个判别法

我们着手研究把起初定义在 $A^k\times L^2$ 上(取值在 L^2 内)的多重线性算子(连续)扩张到 $(C_0(\mathbb{R}^n))^k\times L^2(\mathbb{R}^n)$ 上这一基本问题.

由于对所有函数 $a\in A(\mathbb{R}^n)$，我们有 $\|a\|_\infty\leqslant\|a\|_A$，条件 $\tau(\eta,\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^{nk}\times\mathbb{R}^n)$ 对于定义在 $(C_0)^k\times L^2$ 上取值在 L^2 内的

π 的连续性是必要的. 但这个条件不是充分的. 这里是一个例子，取 $n=k=1$，即在一维情形并且算子是双线性的. 令 $\pi(a,f)=(Ha)f$，这里 H 是 Hilbert 变换. 在这种情形，$\tau(\eta,\xi)=-i\pi\ \mathrm{sign}\ \eta$，但 $\pi(a,f)$ 没有所希望的连续性，这是因为 H 从 C_0 到 L^∞ 不是有界的.

这个例子修改(H 代以其它的卷积算子)以后，可以看出，若想其核属于 L^∞ 时双线性算子 $\pi(a,f)$ 连续，必须假定 a 属于 Wiener 代数.

多重线性算子在$(C_0(\mathbb{R}^n))^k\times L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的一个充分条件由下列定理提供.

定理 1 假定 $\tau(\eta,\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^{n(k+1)})$ 还满足下列条件

$$|\partial^\gamma\tau(\eta,\xi)|\leqslant C(|\xi|+|\eta|)^{-|\gamma|},\tag{3.1}$$

其中

$$\gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k),\gamma_0\in\mathbb{N}^n,\cdots,\gamma_k\in\mathbb{N}^n,$$

而

$$|\gamma|=|\gamma_0|+|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_k|\leqslant N=n(k+1)+1,$$

则由(2.2)定义的相应于这样一个象征的多重线性算子满足

$$\|\pi(a_1,\cdots,a_k,f)\|_2\leqslant C\|a_1\|_\infty\cdots\|a_k\|_\infty\|f\|_2.\tag{3.2}$$

由此即知 $\pi(a_1,\cdots,a_k,f)$ 可连续扩张到情形：$a_1\in C_0,\cdots,a_k\in C_0$ 和 $f\in L^2$.

把算子 $\pi(a_1,\cdots,a_k,f)$ 扩张到情形 $a_1\in L^\infty,\cdots,a_k\in L^\infty$ 和 $f\in l^2$ 是适宜的.

若 $k=1$ 且(3.2) 成立，扩张问题具有一个显然的解. 事实上，我们知道对于拓扑 $\sigma(L^\infty,L^1)$，C_0 在 L^∞ 中是稠密的. 而这个拓扑可由下列等价条件定义：一个序列 $a_m\in L^\infty$ 弱收敛到 $b\in L^\infty$，当且仅当乘以函数 $a_m(x)$ 的逐点乘法算子 $A_m:L^2\to L^2$ 弱收敛到乘以

$b(x)$ 的逐点乘法算子 B；即

$$\lim_{m\to\infty}(A_m f,g)=(Bf,g)\qquad \text{对于 } f\in L^2 \text{ 和 } g\in L^2.$$

于是定理由下列命题补充.

命题 2 若 $k=1$，又若函数 $a_m\in C_0$ 在 $\sigma(L^\infty,L^1)$ 拓扑意义下弱收敛到 $b\in L^\infty$，则算子 $T_m:L^2\to L^2$（由 $T_m(f)=\pi(a_m,f)$ 定义）弱收敛到一个算子 T，记之为 $\pi(b,f)$.

这个命题证明如下. 考虑三线性形式

$$J(a,f,g)=\int\pi(a,f)g\,dx=\int a\,d\mu_{(f,g)},$$

这里有界 Radon 测度 $d\mu_{(f,g)}$ 的存在性由估计

$$|J(a,f,g)|\leqslant C\|a\|_\infty\|f\|_2\|g\|_2(a\in C_0,f\in L^2,g\in L^2)$$

推出.

我们打算验证 $d\mu_{(f,g)}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$，为此用适当简单的函数逼近 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一般函数 f 和 g. 我们要利用 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的函数，并设它们的 Fourier 变换有一个不含 0 的紧支集. 在这种情形下 $d\mu_{(f,g)}=h(x)$，这里

$$h(x)=(2\pi)^{-2n}\iint e^{-ix\cdot\eta}\hat{g}(-\eta-\xi)\hat{f}(\xi)\tau(\eta,\xi)\,d\eta d\xi.$$

先对 ξ 积分，便得到 η 的一个函数，它有紧支集，并且它的正则性足以保证 $h(x)$ 连续且在无穷远点是 $O(|x|^{-n-1})$. 由稠密性和连续性即得当 $f\in L^2,g\in L^2$ 时 $d\mu_{(f,g)}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$. 这就推出希望的结论.

这个方法仅对 $k=1$ 适合，当 $k\geqslant 2$ 时不再有效. 这时出现了典型的非线性现象. 一个明显的例子是普通乘积 $\pi(a_1,a_2,f)=a_1a_2f$. 若 $n=1$，而

$$a_{1,m}(x)=e^{imx}(1+x^2)^{-1/2},a_{2,m}(x)=e^{-imx}(1+x^2)^{-1/2},$$

那么 $a_{1,m}$ 和 $a_{2,m}$ 弱收敛到 0，但对 $a_{1,m}\,a_{2,m}f$，却根本不如此.

因此我们要舍弃这个弱拓扑（对函数或者算子），而代以一个

(对 L^∞ 函数的)收敛概念,它要能够蕴涵算子的强收敛性.我们说一个连续线性算子序列 $T_m: L^2 \to L^2 (m \in \mathbb{N})$ 强收敛到 $T: L^2 \to L^2$,当且仅当对所有 $f \in L^2$, $T_m(f)$ 按 L^2 范数收敛到 $T(f)$.就函数来说,我们说 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一个序列 $a_m(x)$ 狭义收敛到 $b(x)$,当且仅当乘以 $a_m(x)$ 的逐点乘法算子 A_m 强收敛到乘以 $b(x)$ 的逐点乘法算子 B.这蕴涵(由 Banach 定理)序列 $\| a_m \|_\infty$ 有界且对所有 $T > 0$, $\left(\int_{-T}^{T} |b(x) - a_m(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ 趋于 0.

这个条件显然是充分的,而定理 1 应当由下列命题补充.

命题3 假定对 $1 \leqslant j \leqslant k$, $a_{j,m}(x)$ 属于 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 并狭义收敛到属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的函数 a_j.

则对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的所有函数 f,函数 $\pi(a_{1,m}, \cdots, a_{k,m}, f)$ 按 L^2 范数收敛到一个极限,记之为 $\pi(a_1, \cdots, a_k, f)$,它不依赖于所用的逼近序列 $a_{1,m}, \cdots, a_{k,m}$ 的选择.

此外如此扩张到 $(L^\infty)^k \times L^2$ 上的多线性算子本身在下述意义下是连续的:函数 $a_{j,m} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的狭义收敛性蕴涵,对所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\pi(a_{1,m}, \cdots a_{k,m}, f)$ 按 L^2 范数收敛到 $\pi(a_1, \cdots, a_k, f)$.

首先回到定理 1.假定 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 并且 $a_1, \cdots, a_k$ 属于 $A(\mathbb{R}^n)$,于是我们可以把 $g = \pi(a_1, \cdots, a_k, f)$ 作为 $g_\varepsilon(x)$ 当 $\varepsilon > 0$ 趋向于 0 时的极限来计算,这里

$$g_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n(k+1)} \iint e^{ix \cdot (\bar{\eta} + \xi)} \times \exp(-\varepsilon |\eta|^2 - \varepsilon |\xi|^2) \tau(\eta, \xi) \hat{a}(\eta) \hat{f}(\xi) d\eta d\xi.$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理即得 $g(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_\varepsilon(x)$.假如我们对 g_ε 能够建立(3.2)并且 C 不依赖于 ε, Fatou 引理即允许过渡到极限.我们还可在 0 的邻域内截断 τ,并且以下我们就对这些截断象征进行推理并省略指标 $\varepsilon > 0$.

现用 $K(x,u_1,\cdots,u_k)$ 表示 τ 的逆 Fourier 变换. 一方面, K 在 $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ 上连续且在无穷远是 $O(|x|+|u_1|+\cdots+|u_k|)^{-N}$(但常数关于 $\varepsilon>0$ 不是一致的).

另一方面,我们有 $|K(x,u)|\leqslant C_0(|x|+|u|)^{-n(k+1)}$ 并且 $|\partial K/\partial x_j|+|\partial K/\partial u_{j,k}|\leqslant C_1(|x|+|u|)^{-k(k+1)-1}$.

经过直接计算得

$$\begin{aligned}
&\pi(b,f)(x)\\
&=\int\cdots\int K(x-y,x-u_1,\cdots,x-u_k)b_1(u_1)\cdots b_k(u_k)\\
&\quad\times f(y)du_1\cdots du_k dy\\
&=\int\widetilde{K}(b;x,y)f(y)dy
\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}(b;x,y)=&\int\cdots\int K(x-y,x-u_1,\cdots,x-u_k)\\
&\times b_1(u_1)\cdots b_k(u_k)du.
\end{aligned}$$

那么容易验证

$$|\widetilde{K}(b;x,y)|\leqslant C'_0\ \|b_1\|_\infty\cdots\|b_k\|_\infty|x-y|^{-n}\tag{3.4}$$

以及

$$|\partial/\partial x_j\widetilde{K}(b;x,y)|\leqslant C'_1\|b_1\|_\infty\cdots\|b_k\|_\infty|x-y|^{-n-1},\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
|\partial/\partial y_j\widetilde{K}(b;x,y)|\leqslant& C'_1\|b_1\|_\infty\cdots\|b_k\|_\infty\\
&\times|x-y|^{-n-1}(1\leqslant j\leqslant n).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

这就促使我们利用 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理以建立线性算子 $T^{(k)}$ 的连续性,其定义是 $T^{(k)}(f)=\pi(b_1,\cdots,b_k,f)$.

对 k 进行归纳. 我们有 $T_b(1)=L(b_1,\cdots,b_{k-1})[b_k]$,其中 L 的象征是 $\tau(\eta_1,\cdots,\eta_k,0)$. 这个象征满足(3.1),因此定义一个在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的 Calderon-Zygmund 算子 $T^{(k-1)}$. 这个连续性由归纳假设保证.

因而算子 $T^{(k-1)}$ 从 L^∞ 到 BMO 连续,遂有 $T^{(k)}(1)\in$ BMO,事

实上这里根本没有处理奇异积分算子,因为 τ 已被 τ_ε 取代. 并且所表述的定性信息应当被写成定量估计的形式. 我们没有这样作以免篇幅冗长.

致于说到 $^tT^{(k)}(1)$,验证是同样的,只需考虑到第 2 节末尾曾经进行过的伴随象征的计算.

为了证明弱连续性,可利用第 8 章命题 6,用 χ_ω 表示函数 $e^{i\omega\cdot x}$, $x\in\mathbb{R}^n$. 并来证明存在一个常数 C 使 $\|T^{(k)}(\chi_w)\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C, w\in\mathbb{R}^n$. 那么弱连续性将得以验证.

在我们这里 $T^{(k)}(\chi_\omega)=$

$$(2\pi)^{-nk}\int\cdots\int e^{ix\cdot(\eta_1+\cdots+\eta_k)}\tau(w,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1},\eta_k-w)$$
$$\times\hat{b}_1(\eta_1)\cdots\hat{b}_{k-1}(\eta_{k-1})\hat{b}_k(\eta_k-w)d\eta_1\cdots d\eta_k$$
$$=L_\omega(b_1,\cdots,b_{k-1})[\chi_\omega b_k],$$

其中 L_ω 的象征是 $\tau(\omega,\eta_1,\eta_{k-1},\eta_k-w)$. 这些象征关于 ω 一致满足假设(3.1),因而仍是归纳假设允许得到结论.

我们对整数 k 进行归纳推理以建立命题 3. 用 $T_m=T_{k,m}$ 表示在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上由 $T_m(f)=\pi(a_{1,m},\cdots a_{k,m},f)$ 定义的算子. 我们知道算子 $T_m:L^2\to L^2$ 组成一个有界序列,因此只需验证当 f 跑遍 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密向量子空间时函数列 $T_m(f)$ 的收敛性,即可建立 T_m 的强收敛性. 这里所用的子空间 V 由下列条件定义:$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 并且 0 不属于 $\hat{f}$(f 的 Fourier 变换) 的紧支集.

先把 $\tau(\eta,\xi)\hat{f}(\xi)$ 分解成一个级数 $\sum_0^\infty p_j(\xi)g_j(\eta)$,对于后面用到的所有范数,这是一个依范数收敛级数. 为建立这个分解,令 $T>0$ 是一个充分大的数,以致 $\hat{f}(\xi)$ 的支集含于 $|\xi|\leqslant T/3$. 以 T 为关于每个变量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的周期把由 $\tau(\eta,\xi)\hat{f}(\xi)$ 给定的 ξ 的函数周期延拓. 计算这个函数的 Fourier 系数

$$T^{-n}\int\tau(\eta,\xi)\hat{f}(\xi)\exp(-2\pi i\xi\cdot k\,T^{-1})d\xi=q_k(\eta),$$

最后有

$$\tau(\eta,\xi)\hat{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} q_k(\eta)\exp(2\pi i\xi\cdot k\,T^{-1})\chi(\xi),$$

其中 $\chi(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是一个“截断”函数，其作用是把 $\tau(\eta,\xi)\hat{f}(\xi)$ 的主要项同由周期化带来的多余项分离开. 简单的改变写法就得到所宣布的分解. 然后按项推理，略去指标 j，于是归结到 $\tau(\eta,\xi)\hat{f}(\xi)$ 代以 $p(\xi)q(\xi)$ 的情形，这里

$$0\leqslant \sup_{|\alpha|\leqslant N}\|(1+|\eta|)^{|\alpha|}\partial^\alpha q(\eta)\|_\infty<\infty. \tag{3.7}$$

那么

$$\pi(a_{1,m},\cdots,a_{k,m},f) = \omega(x)\,Q(a_{1,m},\cdots,a_{k,m}),$$

其中

$$Q(a_{1,m},\cdots,a_{k,m})$$
$$=\int\cdots\int e^{ix\cdot(\eta_1+\cdots+\eta_k)}q(\eta_1,\cdots,\eta_k)\hat{a}_{1,m}(\eta_1)\cdots\hat{a}_{k,m}(\eta_k)d\eta_1\cdots d\eta_k.$$

这里 $\omega(x)$ 连续且在无穷远点是 $O(|x|^{-n})$. 所要的结论将能推出，如果能够指明函数 $g_m(x)=Q(a_{1,m},\cdots,a_{k,m})$ 在范数 $L^2(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^{-2}dx)$ 的意义下收敛到 $g_\infty(x)=Q(a_1,\cdots,a_k)$.

为建立这个收敛性，考虑由 $L_m(f)=Q(a_{1,m},\cdots a_{k-1,m},f)$ 定义的算子 $L_m: L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$. 这些算子的一致连续性由定理 1 得到. 此外，如果分布 $R\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{nk})$ 是象征 $q(\eta)$ 的逆 Fourier 变换，则 L_m 的核 $L_m(x,y)$ 由下式给定

$$L_m(x,y)=\int\cdots\int R(x-u_1,\cdots,x-u_{k-1},x-y)$$
$$\times\, a_{1,m}(u_1)\cdots a_{k-1,m}(u_{k-1})du.$$

由于 $q(\eta)$ 是正则的，R 在无穷远点充分递降以致有 $|L_m(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n-1}$，$C$ 不依赖于 m. 此外，有 $a_{j,m}$ 到 a_j 的狭义收敛蕴涵 $L_m(x,y)$ 到 $L(x,y)$ 的简单收敛，$L(x,y)$ 由在积分号下过渡到极限来定义.

由于关于命题 3 的结论的归纳假设，我们知道

$$\|L_m(f)-L(f)\|_2\to 0 \qquad (f\in L^2), \tag{3.8}$$

并且有

$$|L_m(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-1}, \tag{3.9}$$

以及

$$L_m(x,y) \to L(x,y) \qquad \text{若 } x \neq y.$$

由这三个性质本身即推出 $L_m(b_m)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-2n}dx)$ 范数意义下收敛到 $L(b)$，只要 b_m 狭义收敛到 $b(x)$.

我们来验证这一断言. 把 L_m 分解为 $A_m + B_m$，这里 B_m 由核 $L_m(x,y)\chi_{\{|x-y|\geqslant 1\}}$ 定义(χ_E 表示 E 的指示函数).

那么 $B_m(b_m)$ 一致收敛到 $B_\infty(b)$ 并且对 $f \in L^2$，$\| B_m(f) - B_\infty(f) \|_2$ 趋于 0. 这表明可以 A_m 代替 L_m. 这时，只需注意到 $A_m(b_m)$ 在 L^2_{loc} 中收敛到 $A_\infty(b)$，并且这些函数满足

$$\sup_{x\in \mathbb{R}^n}\left[\int_{|x-y|\leqslant 1} |A_m(b_m)|^2 dy\right]^{1/2} < \infty. \tag{3.10}$$

这足以保证在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-2n}dx)$ 内的收敛性.

作为本节的结束，我们给出定理 1 的算子 $T_k(f) = \pi(a_1, \cdots, a_k, f)$ 的弱连续性的第二个证明.

我们利用第 8 章命题 5. 为验证 T_k 的弱连续性，只需验证当 $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$，是一个小波标准正交基时有 $\| T_k(\psi_\lambda) \|_2 \leqslant C$. 我们注意加于多重线性象征 τ 的条件对展缩是不变的. 这表明相应于 τ 和 $a_1, \cdots, a_k$(满足 $\| a_1 \|_\infty \leqslant 1, \cdots \| a_k \|_\infty \leqslant 1$) 的各种选择的所有算子 T_k 的集对于平移和展缩是整体不变的. 这个注解允许把要施行的验证的集合缩减为对 $2^n - 1$ 个“小波母亲”的验证. 最后我们利用 Littlewood-Paley 小波；因而 $\hat{\psi}_\lambda$ 以“二进环形”

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant \sup(|\xi_1|, \cdots, |\xi_n|) \leqslant \frac{8\pi}{3}$$

为支撑.

忽略指标 λ，便归结为研究

$$\iint e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \tau(\eta, \xi) \hat{b}(\eta) \hat{\psi}(\xi) d\eta d\xi,$$

并且验证这个函数属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$. 只需重新采用前面用过的分解 $\tau(\eta,\xi)\hat{\psi}(\xi)=\sum_0^{\infty}p_j(\xi)q_j(\eta)$，并且容易得到 $\|T_k(\psi_\lambda)\|_2\leqslant C$.

这个证明的价值在于能够推广到用 BMO 代替 L^∞ 的情形，这正是下节我们将要研究的.

4. 在 $(\mathrm{BMO})^k$ 上定义的多重线性算子

我们打算尽可能的在定理 1 中用 BMO 代 L^∞. 这个课题提出两个问题. 第一个问题涉及到估计

$$\|\pi(a_1,\cdots,a_k,f)\|_2\leqslant C\|a_1\|_\infty\cdots\|a_k\|_\infty\|f\|_2,$$

代以更精确的估计，即

$$\|\pi(a_1,\cdots,a_k,f)\|_2\leqslant C\|a_1\|_{\mathrm{BMO}}\cdots\|a_k\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_2 \tag{4.1}$$

的可能性. 其中 $a_1,\cdots a_k$ 属于 Wiener 的代数 $A(\mathbb{R}^n)$.

第二个问题在于延拓对 $a_j\in A(\mathbb{R}^n)$ 定义好的多重线性算子 $\pi(a_1,\cdots,a_k,f)$ 到一般情形 $a_j\in\mathrm{BMO}$. 这个延拓可不能以质朴的方式进行，这是因为 $A(\mathbb{R}^n)$ 在 BMO 中不是稠密的. 我们不能再满足于拓扑 $\sigma(\mathrm{BMO},H^1)$，就我们的需要而言，它太欠精密. 我们采用一个中间道路，即强化弱收敛性以适应非线性问题.

定义 1 设 $b_m,m\in\mathbb{N}$，是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的一个函数序列. 我们将说 b_m 狭义收敛到 b，当且仅当下列两个条件满足

$$\|b_m\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C, \tag{4.2}$$

存在常数序列 c_m，使对所有 $R>0$ 有

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\{|x|<R\}}|b(x)-b_m(x)-c_m|^2dx=0. \tag{4.3}$$

如此定义的理由如下. 考虑由第 8 章第 11 节的伪积 $\pi(\beta,f)=$

$\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_k(\beta)S_{k-3}(f)$ 提供的从 BMO 到 L^2 的线性作用. 那么我们有

命题 4 BMO 的函数的一个序列 $\beta_m,\beta\in\mathbb{N}$，狭义收敛到 $\beta\in\mathrm{BMO}$，当且仅当由 $T_m(f)=\pi(\beta_m,f)$ 定义的算子 $T_m:L^2\to L^2$ 在算子强收敛意义下收敛到由 $T(f)=\pi(\beta,f)$ 定义的 T.

为验证这个等价性，一开始就注意到(4.2) 由 Banach 定理提供. 如果一个序列 $T_m:L^2\to L^2$ 是强收敛的，则算子的范数是有界的. 而这些范数等价于函数 β_m 的 BMO 范数.

于是算子 T_m 组成 Calderon-Zygmund 算子的一个有界序列，而若 T_m 强收敛到 T，则 $T_m(1)$ 在 $\sigma(\mathrm{BMO},H^1)$ 拓扑的意义下收敛到 $T(1)$，这正如我们在第 7 章引理 3 曾经指出过的. 从而在拓扑 $\sigma(\mathrm{BMO},H^1)$ 的意义下 β_m 收敛到 β，由此得对固定的 k，$\Delta_k(\beta_m)$ 一致收敛到 $\Delta_k(\beta)$.

对属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 且其 Fourier 变换被 $2^{l-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{l+1},l\in\mathbb{Z}$，支撑的函数 f 检验强收敛性. 由于这些函数组成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个完全子集，这些检验是充分的. 这时若 $k\leqslant l$，$S_{k-3}(f)=0$，而若 $k\geqslant l+6$，$S_{k-3}(f)=f$. k 的其余五个值无关紧要，因为我们已经知道 $\Delta_k(\beta_m)$ 一致收敛到 $\Delta_k(\beta)$.

由上得到 $\sum_{k\geqslant l+6}f(\Delta_k\beta_m)=f(\beta_m-S_{l+6}(\beta_m))$，它应当收敛到 $f(\beta-S_{l+6}(\beta))$.

设 $R>0$，可以构造 f，它有上面叙述的性质，并且在 $|x|\leqslant R$ 上不变为零. 此外 β_m 到 β 的弱收敛性允许以 $S_0(\beta_m)$ 代替 $S_{l+6}(\beta_m)$，然后用常数 $c_m=S_0(\beta_m)(0)$ 代替 $S_{l+6}(\beta_m)$. 这些代替所带来的误差表示成 β_m 和一个 H^1 的函数的数量乘积的形式. 这就得到条件(4.3).

反之，若(4.2) 和(4.3) 成立. 容易把(4.3) 代以函数 $\beta_m-S_0(\beta_m)$ 到 $\beta-S_0(\beta)$ 的在 $L^2(\mathbb{R}^n;(1+|x|)^{-n-1}dx)$ 内的收敛性.

这就得到当f具有我们曾用过的特殊性质时函数$\pi(\beta_m, f)$到$\pi(\beta, f)$在L^2内的收敛性.

现在能够表述基本定理了.

定理2 假定沿用定理1的记号和假设,并设当$\eta_j(1 \leqslant j \leqslant k)$中的一个是零时$\tau(\eta_1, \cdots, \eta_k, \xi) = 0$. 则由(2.2)定义的多重线性算子$\pi: A^k \times L^2 \to L^2$满足

$$\| \pi(b_1, \cdots, b_k, f) \|_2 \leqslant C \| b_1 \|_{\mathrm{BMO}} \cdots \| b_k \|_{\mathrm{BMO}} \| f \|_2, \tag{4.4}$$

并且可连续扩张为一个多重线性算子$\pi: (\mathrm{BMO})^k \times L^2 \to L^2$. 这个连续扩张:用狭义收敛到$b_j$的 Wiener 代数$A$的函数序列$b_{j,m}$逼近一般函数$b_j \in \mathrm{BMO}$即可得到.

证明一步步地沿用定理1的方法. 新的一点是由$T(f) = \pi(b_1, \cdots, b_k, f)$定义的算子$T: L^2 \to L^2$的核的估计. 这个核是

$$K(b; x, y) = \int \cdots \int K(x - u_1, x - u_2, \cdots, x - u_k, x - y) \times b_1(u_1) \cdots b_k(u_k) du_1 \cdots du_k, \tag{4.5}$$

其中K的(在分布意义下的) Fourier 变换是$\tau(\eta, \xi)$.

对$z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$,由$(|x_2| + \cdots + |x_k| + |z|)^{nk} K(u_1, x_2, \cdots, x_k, z)$定义的$u_1 \in \mathbb{R}^n$的函数是中心在0宽度为$|x_2| + \cdots + |x_k| + |z|$的一个分子. 相消条件由$\tau(0, \eta_2, \cdots, \eta_k, \xi) = 0$保证. 于是可以积分这个分子与$b_1 \in \mathrm{BMO}$的乘积. 然后一步一步地推理,每一步都验证积分一个原子同一个 BMO 函数的乘积. 我们仅提示了一下这个计算,它导出

$$|K(b; x, y)| \leqslant C \| b_1 \|_{\mathrm{BMO}} \cdots \| b_k \|_{\mathrm{BMO}} |x - y|^{-n}.$$

同样建立对关于x和y的导数的估计. 利用 David 和 Journé 的$T(1)$定理即可建立由(4.4)表达的连续性. 自然我们要对k进行归纳,而$T^k(1)$等于$T^{(k-1)}(b_k)$,由归纳假设,$T^{(k-1)}$是一个 Calderon-Zygmund 算子. 这个算子把 BMO 映射到它自身,当且仅

当 $T^{(k-1)}(1) = 0$(以常数为模),而这个条件恰好由 $T(\eta_1,\cdots,\eta_{k-1},0,\xi) = 0$ 保证.

不能用我们曾给的第一个证明建立弱连续性,这是因为一个 BMO 函数跟一个特征函数 χ_w 的乘积一般不再属于 BMO. 反之第二个证明极易推广,我们让读者细心验证它.

在结束本节之前,我们注意到条件

$$\tau(0,\eta_2,\cdots,\eta_k,\xi) = \cdots = \tau(\eta_1,\cdots,\eta_{k-1},0,\xi)$$

对于把多重线性算子推广到 $(\mathrm{BMO})^k$ 是必要的. 事实上,取定 $a_1,\cdots,a_{k-1}$,并设 f 在曾用过的子空间 V 内. 以序列 $a_{k,m} = \theta(m^{-1}x)$ 代替 a_k,这里 Fourier 变换 $\hat{\theta}$ 是一个紧支连续函数. 此外假定 $\hat{\theta}$ 是正的并且 $\theta(0) = 1$. 那么

$$\begin{aligned}
&\pi(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k,m},f)(x) \\
&= (2\pi)^{-n(k+1)}\int\cdots\int e^{ix\cdot(\eta_1+\cdots+\eta_k+\xi)} \\
&\quad \tau(\eta,\xi)\hat{a}(\eta_1)\cdots\hat{a}_{k-1}(\eta_{k-1})m^n \times \hat{\theta}(m\eta_k)\hat{f}(\xi)d\eta d\xi \\
&\to (2\pi)^{-nk}\int\cdots\int e^{ix\cdot(\eta_1+\cdots+\eta_{k-1}+\xi)}\tau(\eta_1\cdots,\eta_{k-1},0,\xi)\hat{a}_1(\eta_1) \\
&\quad \cdots\hat{a}_{k-1}(\eta_{k-1})\hat{f}(\xi)d\eta d\xi.
\end{aligned}$$

收敛在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 内成立. 而序列 $\theta(m^{-1}x)$ 在狭义收敛的意义下趋向于 0,遂得 $\tau(\eta_1,\cdots,\eta_{k-1},0,\xi) = 0$.

5. 全纯泛函的一般理论

我们打算把刚建立的多重算子理论和我们要介绍的一种类型的全纯泛函理论结合起来.

我们考查下列情况,泛函在 Banach 空间 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上全纯,取值在有界线性算子的代数 $\mathscr{A} = \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))$ 中.

设 $\Omega\subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是开单位球并考查 L^∞ 的函数取实值或复值的情形.

仿射群 G 由变换 $g(x) = \delta x + h$ 组成,$\delta > 0$,$h \in \mathbb{R}^n$,而 G 在

$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉作用由 $U_g f(x) = \delta^{-n/2} f(\delta^{-1}(x-h))$ 定义. 至于 G 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的作用宜于用算子 $V_g b(x) = b(\delta^{-1}(x-h))(\delta > 0, h \in \mathbb{R}^n)$ 定义.

我们的兴趣在于全纯泛函

$$F: \Omega \to \mathscr{A}. \tag{5.1}$$

它遵守下列交换规则

对所有函数 $b \in \Omega$ 和所有 $g \in G$ (5.2)

$$F(V_g b) = U_g F(b) U_g^{-1}$$

以及下列连续性条件

若 $0 < r < 1$, 又若 $b_j \in \Omega$ 满足 $\| b_j \|_\infty \leqslant r$ 并且狭义收敛到 b, 则算子 $F(b_j)$ 强收敛到 $F(b)$. (5.3)

我们可用更对称的方式表达后一条件, 即要求乘以函数 $b_j(x)$ 的逐点乘法算子 $B_j: L^2 \to L^2$ 在算子的强收敛意义下收敛到(由 $b(x)$ 定义的) 算子 B, 那么对 $F(b_j)$ 和 $F(b)$ 也同样.

后一条件在一定意义下表示 $F(b)$"类似于"乘以 $b(x)$ 的逐点乘法算子. 像在多重线性算子情形已经指出的那样, 这个条件对于能够着手 $F(b)$ 的分析是不可或缺的, 这里 $F(b)$ 限制在 b 属于 Wiener 代数 $A(\mathbb{R}^n)$ 的情形.

我们刚定义的全纯泛函的分析由下列定理给出. 而其综合提出的困难问题, 后面就要叙述.

定理 3 满足(5.2)和(5.3)的全纯映射 $F: \Omega \to \mathscr{A}$ 可表示为

$$F(b) = T_0 + T_1(b) + \cdots + T_k(b_1, \cdots, b_k) + \cdots, \tag{5.4}$$

其中, 若 $b_1, \cdots, b_k$ 属于 Wiener 的代数 $A(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\begin{aligned} & T_k(b_1, \cdots, b_k)(f)(x) \\ &= (2\pi)^{-n(k+1)} \int \cdots \int e^{ix\cdot(\xi+\eta_1+\cdots+\eta_k)} \tau_k(\eta_1, \cdots, \eta_k, \xi) \hat{b}_1(\eta_1) \\ & \quad \cdots \hat{b}_k(\eta_k) \hat{f}(\xi) d\eta_1 \cdots d\eta_k d\xi. \end{aligned} \tag{5.5}$$

此外, 外重线性象征 τ_k 满足

$$\tau_k \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n(k+1)}), \tag{5.6}$$

$$\tau_k(\lambda\eta_1, \cdots, \lambda\eta_k, \lambda\xi) = \tau_k(\eta_1, \cdots, \eta_k, \xi), \text{对所有 } \lambda > 0; \tag{5.7}$$

存在一个常数 $C \geqslant 0$ 使得对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的 $b_1, \cdots, b_k$ 和属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 f 的所有选取有

$$\| T_k(b_1, \cdots, b_k)(f) \|_2 \leqslant C^k \| b_1 \|_{\infty} \cdots \| b_k \|_{\infty} \| f \|_2, \tag{5.8}$$

最后 T_k 继承了 T 的连续性(5.3).

在证明定理 3 之前,必须提醒读者,在无穷维 Banach 空间 B 上的全纯映射可能表现出下列病态. 可以构造一个泛函在空间 $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 上是整的,但在以 0 为中心的一个给定的球上不是有界的. 这里是一个例子. 考虑线性形式 $\lambda_k(f) = \int_0^1 f(x)e^{ikx}dx, k \in \mathbb{N}$, $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, 并令

$$F(f) = \sum_0^{\infty} (\lambda_k(f))^k.$$

由于当 k 趋向无穷时,$\lambda_k(f)$ 趋向于 0,这个映射是整的. 它在球 $\| f \|_{\infty} \leqslant 2$ 上不是有界的. 因否则,$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}F(e^{i\theta}f)d\theta$ 将同样有界(关于 $k \in \mathbb{N}$ 一致),从而

$$\sup\left\{ \left| \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}F(e^{i\theta}f)d\theta \right| ; \| f \|_{\infty} \leqslant 2 \right\}$$

将是一个有界序列. 但这个序列是 $2\pi \cdot 2^k$.

现回到定理 3. 在单位球 $\| b \|_{\infty} < 1$ 上的全纯映射 F 在 0 连续,因而在 0 的邻域内,例如球 $\| b \|_{\infty} < \delta$ 上有界. 但不能精确指定 $\delta > 0$ 的值.

对 $\| b \|_{\infty} < \delta$, 令

$$T_k(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}F(e^{i\theta}b)d\theta,$$

因而有 $\| T_k(b) \|_{\mathscr{A}} \leqslant C$,常数 C 不依赖于 k. 由齐次性得

$$\| T_k(b) \|_{\mathscr{A}} \leqslant C\delta^{-k} \| b \|_{\infty}^k.$$

$T_k(b)$ 是 b 的 k 阶齐次多项式,因而是对称多重线性算子在 $b_1 = b_2$

$= \cdots = b_k = b$ 上的限制. 因而得到(5.7).

T_k 从 F 继承了交换性等式(5.2)以及连续性(5.3). 因而可利用命题 1 对 T_k 进行分析.

我们的能力就限于此，因为现时我们尚未建立充分有效的连续性判别法，以便仅考察多重线性象征 τ_k，就获得(5.8)所要求的算子范数的增长性. 如果我们试图把估计(5.8)叠加，另一个困难就会表现出来. 正如我们曾强调的那样，有可能 $F(b)$ 在 $\|b\|_\infty < 1$ 内全纯，而(5.8)内的最佳常数也许是 10^{10}，那么要把不等式(5.8)叠加，就必须假定 $\|b\|_\infty < 10^{-10}$.

这里是解释上述考虑的一个例子. 假定 $n = 1$，并用 $b(x)$ 表示 $L^\infty(R)$ 的一个函数，取实值或复值，满足 $\|b\|_\infty < 1$. 设 $B(x)$ 是 $b(x)$ 的一个原函数，令 $z(x) = x + B(x)$, $-\infty < x < \infty$. 那么 $z(t)$, $-\infty < t < \infty$，是一个 Lipschitz 图象 Γ 的参数表示. 事实上，令 $b = b_1 + ib_2$，b_1 和 b_2 是实的，且有 $\|b_1\|_\infty \leqslant r < 1$. 令 $x = t + B_1(t)$，$y_2 = B_2(t)$，我们注意到 x 对应 t 的映射是双向 Lipschitz 的. 于是 $y = A(x)$，并且 $\|A'\|_\infty \leqslant \dfrac{\|b\|_\infty}{1 - \|b\|_\infty}$. 我们考虑由 Γ 上的 Cauchy 核定义的作用在 $L^2(\Gamma)$ 上的算子. 我们采用由 $K(x, y) = \text{v.p.}\ (z(x) - z(y))^{-1}$ 给定的作用在 $L^2(\mathbb{R}; dx)$ 上的(等价的)实现. 用 $T(b)$ 表示这后一算子.

我们有

定理 4 沿用前面的记号，$T(b)$ 是一个在 $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ 内取值具有性质(5.2)和(5.3)的在 $\|b\|_\infty < 1$ 内的全纯映射.

我们注意到，若 $b(x)$ 是实值的，$T(b) = \pi M_h U_h H U_h^{-1} M_h$，其中 H 是 Hilbert 变换，$h(x) = x + B(x)$，U_h 是由这个双向 Lipschitz 变量替换诱导的保范同构，即 $U_h(f) = (f \circ h)\sqrt{h'(z)}$，而 M_h 是乘以 $(h'(x))^{-1/2}$ 的逐点乘法算子. 因而若 $b(x)$ 是实的，$T(b)$ 显然在

$L^2(\mathbb{R})$ 上是有界的. 于是,一条曲线上的 Cauchy 核看起来像由 Hilbert 变换跟双向 Lipschitz 变量替换复合而得的算子的解析延拓.

为证明定理 4,考虑截断核 $K_{\varepsilon,R}(x,y)=(z(x)-z(y))^{-1}$,若 $\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant R(R>\varepsilon>0)$ 而 $K_{\varepsilon,R}(x,y)=0$,其余. 由于 $T(b)$ 是一个 Calderon-Zygmund 算子,由 $K_{\varepsilon,R}$ 定义的截断算子 $T_{\varepsilon,R}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上一致有界并且强收敛到 $T(b)$. 这些截断算子 $T_{\varepsilon,R}(b)$ 显然在 $\|b\|_\infty<1$ 内全纯,并且当 $\|b\|_\infty\leqslant r<1$ 时一致有界. 这些截断算子强收敛到 $T(b)$,$T(b)$ 在 $\|b\|_\infty<1$ 内也是全纯的.

算子 $T(b)$ 可展成级数 $\sum\limits_0^\infty(-1)^k\Gamma_k(b)$,其中 $\Gamma_k(b)$ 由核 v. p. $\dfrac{(B(x)-B(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$ 定义. 相应的多重线性算子有核

$$\text{v. p. }\frac{(B_1(x)-B_1(y))\cdots(B_k(x)-B_k(y))}{(x-y)^{k+1}},$$

其中 $B'_1=b_1\in L^\infty(\mathbb{R}),\cdots,B'_k=b_k\in L^\infty(\mathbb{R})$. 相应的多重线性象征是

$$\tau_k(\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_k)=\frac{\pi}{k!}\,\frac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_k}\,\Delta_{\alpha_1}\cdots\Delta_{\alpha_k}(\xi^k\operatorname{sign}\xi),$$

其中

$$\Delta_\alpha f(\xi)=f(\xi+\alpha)-f(\xi),\text{等等}\cdots.$$

这个多重线性通路是 Calderon 计划的所有后期工作的起点,不过迟至 1977 年才由 Calderon 用复变方法得到估计 (5.8) ([38]).

事实上,还可改进估计(5.8),如果我们准备好了 $T(b):L^2\to L^2$ 的范数当 $\|b\|_\infty<1$ 且 $\|b\|_\infty$ 接近于1时的估计. 重新采用第 9 章的结果得

$$\|T(b)\|\leqslant C(1-\|b\|_\infty)^{-5}$$

由于

$$\Gamma_k(b)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}T(e^{i\theta}b)d\theta,$$

即知当 $\|b\|_\infty < 1$ 时有 $\|\Gamma_k(b)\| \leqslant C(1 - \|b\|_\infty)^{-5}$. 假定 $\|b\|_\infty < 1 - \dfrac{1}{1+k}$,并利用 Γ_k 的齐次性即得 $\|T_k(b)\|_\infty \leqslant C(1+k)^5$,由于 $\left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right)^{-k} \leqslant C'$;这个估计可推广到 $\|b\|_\infty \leqslant 1$ 的情形.

这个估计不是最佳的([53]),我们也不知道最佳的估计是什么样的.

反之 $\|T(b)\|$ 的最佳估计是知道的,它由 $C(1 - \|b\|_\infty)^{-1/2}$ 给出,这由 G. David ([94]) 和 T. Murai [194] 证明.

现在验证若 $\|b_j\|_\infty \leqslant r \leqslant 1$,且 b_j 狭义收敛到 $b(x)$,则相应算子 $T(b_j)$ 强收敛到 $T(b)$.

仍写出 $T(b) = \sum_0^\infty (-1)^k \Gamma_k(b)$, 我们有

$$\|\Gamma_k(b)\| \leqslant C(1+k)^5 \|b\|_\infty^k.$$

表示在 $T(b)$ 和 $T(b_j)$ 的级数分别收敛和关于 j 一致按范数收敛. 于是只需验证对每一固定的 k,$\Gamma_k(b_j)$ 在算子强收敛意义下收敛到 $\Gamma_k(b)$. 由于我们已经对有关算子的范数准备好了一致估计,只需验证对所有 C^1 类的有紧支集的函数,$\Gamma_k(b_j)[f]$ 按 L^2 范数收敛到 $\Gamma_k(b)[f]$. 设 $[-T,T]$ 是一个包含 f 的支集的区间. 若 $|x| \geqslant T+1$, 直接写出

$$\Gamma_k(b_j)[f](x) = \int \frac{(B_j(x) - B_j(y))^k}{(x-y)^{k+1}} f(y)dy,$$

遂有

$$|\Gamma_k(b_j)[f](x)| \leqslant C(f)|x|^{-1},$$

因而函数 $\Gamma_k(b_j)[f]$(在简单收敛的意义下)收敛到 $\Gamma_k(b)[f]$. 由上推出在 $]-\infty, -T-1]$ 和 $[T+1, \infty[$ 上的 L^2 收敛性.

为处理在 $[-T-1, T+1]$ 上的 L^2 收敛性,分部积分得两项

$$\Gamma_{k-1}(b_j)[b_j f] \text{ 和} \int \frac{(B_j(x) - B_j(y))^k}{(x-y)^k} f'(y)dy.$$

项由关于 k 的归纳假设和下列注解处理：若算子 $T_j: L^2 \to L^2$ 强收敛到 T，并且函数 $u_j \in L^2$ 按 L^2 范数收敛到 u，则 $T_j(u_j)$ 按 L^2 范数收敛到 $T(u)$.

第二项由于核的奇异性已经消失，可援引 Lebesgue 控制收敛定理进行分析.

在我们所处理的例子中，$L^\infty(\mathbb{R})$ 是泛函 $T(b)$ 的全纯空间，即不能把全纯泛函 $T(b)$ 解析延拓到一个 Banach 空间的比 $L^\infty(\mathbb{R})$ 更大的开集上. 为证实这一事实，只需注意到对所有函数 $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ 我们有 $\| \Gamma_1(b) \| \geqslant \pi \| b \|_\infty$. 这个不等式援引下列引理来证明.

引理 1 设 $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子，其分布核记作 $K(x, y)$. 那么 $\delta^n K(\delta x + x_0, \delta_y + x_0)$，$x_0 \in \mathbb{R}^k$，$\delta > 0$，是 $T_{(x_0,\delta)} = U_g T U_g^{-1}$ 的分布核，其中 $g(x) = \dfrac{x - x_0}{\delta}$，$T_{(x_0,\delta)}$ 的范数等于 T 的范数.

在我们面临的应用中，$K(x, y) = \text{v. p. } \dfrac{B(x) - B(y)}{(x - y)^2}$，其中 B 是 b 的一个原函数.

令 $\delta \to 0$，算子 $T_{(x_0,\delta)}$ 的弱极限是 $\pi b(x_0) H$，这里 H 是 Hilbert 变换. 这个弱极限在所有点 x_0 存在，只要 $b(x_0)$ 是 $B(x)$ 在 x_0 的导数. 遂有 $\pi \| b \|_\infty \leqslant \| \Gamma_1(b) \|$，正如所宣布的那样.

6. 对 Calderon 计划的应用

Calderon 精密象征算法是对一个经典伪微分算子（它本质上是一个卷积算子）和由正则性有限制的一个函数定义的逐点乘法算子之间的交换子的精密研究.

我们要叙述几个例子，其中的最佳结果可援引第 3 节的多重

线性算法得到.

以一个一维例子作为开始，其中的伪微分算子是 Hilbert 变换. 这里我们有

定理 5 设 $b(x)$ 是实变量 x 的一个局部可积函数，而 B 是由 $b(x)$ 定义的逐点乘法算子. 则交换子$[H,B]$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界，当且仅当 $b(x)$ 属于 BMO.

若函数 $b_j \in$ BMO 对于 $\sigma(\mathrm{BMO},H^1)$ 拓扑收敛到 b，则相应交换子$[H,B_j]$ 对于算子弱拓扑收敛到$[H,B]$.

先验证条件 $b \in$ BMO 的必要性. 用 $I = [a,b]$ 表示一个长度为 l 的区间，用 J 表示$[b+l,b+2l]$. 把 $T = [H,B]$ 的核记作 $K(x,y)$，假定 T 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界. 检验 L^2 连续性的一个方式是考虑辅助函数 $g(x) = \int_J K(x,y)(x-y)dy, x \in I$， 并且验证 $\| g \|_{L^2(T)} \leqslant Cl^{3/2}$ 成立. 事实上，令 $x - y = x - x_0 + x_0 - y$，而 $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$，这里 $g_1(x) = (x - x_0)T(\chi_J)$，$g_2(x) = T((x_0 - \cdot)\chi_J)$. 从 T 在 L^2 上的连续性即推出所宣布的不等式.

在我们感兴趣的情形，

$$g(x) = \int_J (b(x) - b(y))dy = l(b(x) - c_I),$$

并且

$$\| g \|_{L^2(I)} \leqslant Cl^{3/2},$$

这等价于 $b \in$ BMO.

我们再来证明条件$b \in$ BMO是充分的. 先从b属于 Wiener 代数 $A(\mathbb{R}^n)$ 这一特殊情形入手. 一般情形援引在定理 5 中所叙述的弱连续性即可得到.

若 f 和 b 属于 $A(\mathbb{R})$，则有

$$[H,B]f(x) = -\pi i \iint e^{ix(\xi+\eta)}(\mathrm{sign}(\xi+\eta)$$

$$- \operatorname{sign}\xi)\hat{b}(\eta)\hat{f}(\xi)d\eta d\xi$$

$$= -\pi i \iint e^{ix(\xi+\eta)}(\operatorname{sign}(\xi+\eta)$$

$$- \operatorname{sign}\xi)\varphi_0\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\hat{b}(\eta)\hat{f}(\xi)d\eta d\xi,$$

其中 $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 在$[-1,1]$上等于1. 这个等式的理由是:若 $|\eta| < |\xi|$ 则 $\operatorname{sign}(\xi+\eta) = \operatorname{sign}\xi$,而仅在这种情形 $\varphi_0(\xi/\eta) \neq 1$.

把由象征 $\varphi_0(\xi/\eta)$ 定义的双线性算子记作 $\pi(b,f) = T_b(f)$, $\varphi_0(\xi/\eta)$ 是0阶齐次且在(0,0)外是无穷次可导的. 根据定理2,当 b 属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ 时,T_b 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界. 最后,由上述双线性等式得到$[H,B] = [H,T_b]$,对 $b \in A(\mathbb{R})$ 遂有

$$\|[H,B]\| \leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{6.1}$$

为过渡到一般情形,考虑三线性形式

$$\int [H,B](f)g dx = \int H(bf)g dx - \int bH(f)g dx =$$

$$= -\int bfH(g)dx - \int bH(f)g dx = -\int bh dx,$$

其中

$$h = gH(f) + fH(g).$$

若 f 和 g 属于 $L^2(\mathbb{R})$,h 属于 $L^1(\mathbb{R})$,那么对 $b \in A(\mathbb{R})$ 有 $\left|\int bh dx\right| \leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}$. 由此得到 h 属于 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$,遂得估计

$$\|gH(f) + fH(g)\|_{H^1} \leqslant C\|f\|_2\|g\|_2. \tag{6.2}$$

这个估计可以跟全纯 Hardy 空间的普通性质结合起来. 事实上,假定 f 和 g 是实值的(这对在一般情形证明(6.2)是充分的),那么 $f + iH(f) = F$ 在上半平面全纯并且属于(全纯) Hardy 空间 $\mathbb{H}^2$. 对 $g + iH(g) = G$ 也同样,并且乘积 FG 属于全纯空间$\mathbb{H}^1$. FG 的虚部属于作为$\mathbb{H}^1$ 的 Stain 和 Weiss 的实变量变体的空间 H^1.

我们在这里看出,本章发展的多重线性算法推广了开创者对

古典的 Hardy 空间的全纯函数所施行的代数算法.

再看第二个例子,这里 Hilbert 变换(在一维情形的 0 阶算子)代以卷积算子 T,其象征 $\tau(\xi)$,$\xi \in \mathbb{R}^n$,是 $m \in \mathbb{N}$ 阶齐次的并且在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 内是无穷次可导的. 这样的 T 是一个 m 阶的经典伪微分算子(而 m 阶齐次常系数微分算子属于这一类).

用 $b(x)$ 表示在$\mathbb{R}^n$ 上定义的一个函数,其正则性在某一时刻将精确化指出,而用 B 表示由 $b(x)$ 定义的逐点乘法算子.

于是有伪微分法的经典等式

$$TB = \sum_{|\alpha| \leqslant m} B_\alpha T_\alpha + R_m, \tag{6.3}$$

其中 B_α 是用$\dfrac{1}{\alpha\,!}\ \partial^\alpha b(x)$ 定义的逐点乘法算子,T_α 以$\left(\dfrac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \partial^\alpha \tau(\xi)$ 作为象征,而 R_m 当 $b(x)$ 充分正则时在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

正如曾经强调过的,伪微分的处理方法不足以达到现在要介绍的最佳结果;这种处理方法甚至不能用来在 $b(x)$ 是 C^m 类的假设下(这不是最佳假设) 证明 R_m 的连续性.

下列定理给予了解答.

定理 6 在前面关于 T 的假设之下,令 $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$, 则有

$$\| R_m(f) \|_2 \leqslant C(m,n,T) \| \Lambda^m b \|_{\mathrm{BMO}} \| f \|_2. \tag{6.4}$$

若 m 是奇数且 $T = \Lambda^m$,则算子 $R_m : L^2 \to L^2$ 的范数和 $\Lambda^m b$ 的 BMO 范数是等价的.

在证明这个结果之前,我们应当阐明几个注释. 当 m 是奇数时可用更便于使用的条件(若 m 是偶数,Λ^m 是 Laplace 算子的一个乘幂,条件是清楚的) 代替条件 $\Lambda^m b \in \mathrm{BMO}$. 若 m 是奇数,Λ^m 是作用在一个一般函数 b 上的一个伪微分算子. 事实上,$\Lambda^m(b)$ 的 BMO 范数等价于函数 $\partial^\alpha b$, $|\alpha| = m$,的 BMO 范数的和. 这是由于下列事实:算子 $\partial^\alpha \Lambda^{-m}$ 是在 BMO 上有界的 Calderon-Zygmund 算子(第 7 章第 4 节).

若 $b(x)$ 是一个 $\leqslant m$ 阶的多项式，那么误差项 R_m 恒等于零. 在这种情形下，$b(x)$ 的 m 阶导数是常数，而常数的 BMO 范数是零.

现在转向(6.4)的证明.

跟定理 5 的情况一样，处理 b 充分正则的情形，以使所有施行的运算有意义. 一般情形则由在定理 5 证明中所用的稠密性论证得到.

可把 $R_m(f)$ 看作 b 和 f 的双线性算子. 相应双线性算子的象征则是

$$a_m(\eta,\xi) = \tau(\xi+\eta) - \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{\eta^\alpha}{\alpha\,!}\,\partial^\alpha\tau(\xi).$$

写出 $a_m(\eta,\xi) = |\eta|^m\tau_m(\eta,\xi)$ 并且证明由象征 $\tau_m(\xi,\eta)$ 定义的算子的 $\mathrm{BMO}\times L^2\to L^2$ 估计. 这启发我们应用定理 2，但碰到 $\tau_m(\eta,\xi)$ 不满足条件(3.1)这一困难. 不过由 τ 的正则性显然有 $\tau_m(0,\xi)=0$. 致于条件(3.1)，当 $|\eta|\leqslant\dfrac{1}{2}|\xi|$ 时它无疑成立，但比方说若 $|\xi+\eta|$ 比 $|\xi|$ 小得多(当 $|\xi|$ 趋向无穷)，那么估计不成立.

为摆脱这一困难，取两个属于 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 的奇函数 θ_0 和 θ_1，使对所有 $t\geqslant 0$ 有 $\theta_0(t)+\theta_1(1/t)=1$，而当 $0\leqslant t\leqslant 1/3$ 时 $\theta_0(t)=1$，当 $t\geqslant 1/2$ 时 $\theta_0(t)=0$(遂有当 $t\geqslant 3$ 时 $\theta_1(t)=0$，当 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时 $\theta_1(t)=1$).

构造两个象征

$$\tau_m(\eta,\xi)\theta_0\left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right) = b_m(\eta,\xi) \text{ 和 } \tau_m(\eta,\xi)\theta_1\left(\frac{|\xi|}{|\eta|}\right) = c_m(\eta,\xi).$$

那么直接的计算显示出 $b_m(\eta,\xi)$ 满足定理 2 的假设. 定义在 $\mathrm{BMO}L^2$ 取值在 L^2 内的相应的双线性算子是有界的.

至于 $c_m(\eta,\xi)$，我们分别检查每一项

$$\tau(\xi+\eta)\theta_1\left(\frac{|\xi|}{|\eta|}\right),\cdots,\frac{\eta^\alpha}{\alpha\,!}\,\partial^\alpha\tau(\xi)\theta_1\left(\frac{|\xi|}{|\eta|}\right),\cdots$$

其中 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$. 写出

$$\tau(\xi+\eta)\theta_1\left(\frac{|\xi|}{|\eta|}\right) = \frac{\tau(\xi+\eta)}{|\xi+\eta|^m}\,\frac{|\xi+\eta|^m}{|\eta|^m}\,\theta_1\left(\frac{|\xi|}{|\eta|}\right)|\eta|^m.$$

我们注意到 $\dfrac{\tau(\eta+\xi)}{|\xi+\eta|^m}$ 是一个 0 阶象征，它对应一个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子，这个算子作用在象征为 $\dfrac{|\xi+\eta|^m}{|\eta|^m}\theta_1\left(\dfrac{|\xi|}{|\eta|}\right)$ 的双线性算子的值域上. 后一双线性象征严格满足定理 2 的条件.

至于其余项 $\eta^\alpha\partial^\alpha\tau(\xi)\ \theta_1\left(\dfrac{|\xi|}{|\eta|}\right)$，把它写成

$$\frac{\partial^\alpha\tau(\xi)}{|\xi|^{m-|\alpha|}}\left[\frac{|\xi|}{|\eta|}\right]^{m-|\alpha|}\theta_1\left(\frac{|\xi|}{|\eta|}\right)|\eta|^m,$$

并对双线性象征 $\left[\dfrac{|\xi|}{|\eta|}\right]^{m-|\alpha|}\theta_1\left(\dfrac{|\xi|}{|\eta|}\right)$ 应用定理 2. 为实现从 $b(x)$ 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的特殊情形到 $b(x)$ 属于 BMO 的一般情形的过渡，只需沿用定理 5 证明中所用的论证(由于这是容易的，我们就不重复了).

我们转向定理 6 的最后一个断言. 计算 R_m 的核 $R_m(x,y)$ 在 $x\neq y$ 上的限制就可证明它. 这个限制由下式给出

$$R_m(x,y)=C(m,n)|x-y|^{-n-m}\times\left[b(y)-\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha\,!}\partial^\alpha b(x)\right].$$

用 B 和 B' 表示$\mathbb{R}^n$中的两个同一半径 $r>0$，中心分别为 x_0 和 x'_0 的球，假定 $|x_0-x'_0|=3r$. 我们打算让算子 R_m 作用在被 B'_0 支撑的特殊函数上并计算所得结果在 B 上的限制. 而为了简化以下的推导，我们用由核

$$S_m(x,y)=|x-y|^{n+m}\theta\left(\frac{|x-y|}{r}\right)R_m(x,y)$$

定义的 S_m 代替算子 R_m，其中 θ 是一个正则的、紧支的偶函数，它当 $t\leqslant 1/2$ 或 $t\geqslant 6$ 时等于 0，而当 $1\leqslant t\leqslant 5$ 时等于 1. 于是若 x 属于 x' 而 $y\in B$，则有 $S_m(x,y)=|x-y|^{n+m}R_m(x,y)$. 另外

$$|x-y|^{n-m}\theta\left(\frac{|x-y|}{r}\right)=r^{n+m}\gamma\left(\frac{x-y}{r}\right),$$

其中 γ 属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，再写出

$$\gamma\left(\frac{x-y}{r}\right)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot(x-y)r^{-1}}\hat{\gamma}(\xi)d\xi,$$

那么这个等式允许分离变量 x 和 y，这是因为 $e^{i\xi(x-y)r^{-1}}=e^{i\xi\cdot xr^{-1}}e^{-i\xi\cdot yr^{-1}}$. 因 x 和 y 的模为 1 的函数所作的乘法算子不影响算子的范数，经过凸组合，S_m 的范数不超过 $C\,r^{m+n}\,\|R_m\|$.

最后考虑由 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球支撑的一个函数，它的积分为 1 并且是充分正则的. 那么若 $|\beta|\leqslant|\alpha|$ 且 $\beta\neq\alpha$，则有 $\int x^\beta\partial^\alpha g(x)dx=0$，而若 $\beta=\alpha$，则这个积分取值为 $(-1)^{|\alpha|}\alpha!$. 有了这个注释之后，把算子 S_m 作用在函数 $(\partial^\beta g)\left(\frac{y-x'_0}{r}\right)$ 上，并考虑在球 B 上所得的结果. 假定 $|\beta|=m$，那么除去 $\partial^\beta b(x)$ 和积分 $\int\partial^\beta g\left(\frac{y-x'_0}{r}\right)\cdot b(y)dy$ 之外，所有的项均消失了，无需求这个积分的值. 最后 $S_m:L^2(B)\to L^2(B)$ 的连续性允许对 $|\beta|=m$ 写出

$$\int_B|\partial^\beta b(x)-I_B^\beta|^2dx\leqslant C|B|$$

这正是应该要证明的.

若 m 是一个偶整数，Λ^m 是一个微分算子，而有 $R_m=0$. 不过当 T 分别代以 $\Lambda^m R_1,\cdots,\Lambda^m R_j$ 时我们感兴趣的结论也成立，其中 $R_j=\partial/\partial x_j\Lambda^{-1},1\leqslant j\leqslant n$.

7. 多重线性算子的 McIntosh 理论

设 $\varphi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个积分等于 1 的函数，$\psi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个积分为零的函数，而对 $t>0$，P_t（对应地 Q_t）是由 φ_t（对应地 ψ_t）定义的卷积算子，其中 $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t)$，$\psi_t$ 同样. 用 $b_1,\cdots,b_k$ 表示 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的 k 个函数，而用 $B_1,\cdots,B_k$ 表示由 $b_1(x),\cdots,b_k(x)$ 定义的逐点乘法算子. 我们打算用 McIntosh 手续[66] 构造一个在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界的算子，也就是说，从一个函数 $m\in L^\infty(0,\infty)$ 出

发，并致力于把算子

$$L_k = \int_0^\infty Q_t B_1 P_t \cdots B_k P_t \, m(t) \frac{dt}{t} \tag{7.1}$$

定义成

$$\int_\varepsilon^k Q_t B_1 P_t \cdots B_k P_t \, m(t) \frac{dt}{t} = L_k^{(\varepsilon,R)},$$

当 ε 趋于 0 而 R 趋于无穷时在算子强收敛意义下的极限.

可以指出，不作对 φ 和 ψ 有更多限制的假设，这个手续是没有希望实行的. 充分条件是

$$|\varphi(x) \leqslant C(1+|x|)^{-n-1} \text{ 和 } |\nabla\varphi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-n-1} \tag{7.2}$$

$$|\psi(x) \leqslant C(1+|x|)^{-n-1}, \int \psi(x)dx = 0$$

$$\text{且 } |\nabla\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-n-1}. \tag{7.3}$$

利用 Calderon-Zygmund 算子的理论以及 David 和 Journé 的 $T(1)$定理，我们证明下列定理.

定理 7 假定(7.2)和(7.3)成立，则算子 $L_k^{(\varepsilon,R)}$ 在算子强收敛的意义下收敛到 L_k，并且 L_k 是一个 Calderon-Zygmund 算子.

首先注意到"截断算子" $L_k^{(\varepsilon,R)}$ 是一般算子 L_k 的一个特殊情形，因为截断可由在$[\varepsilon,R]$ 外 $m(x)$ 由 0 代替而得到.

为简化记号，我们直接对 L_k 进行推理，不过假定 m 由区间$[\varepsilon, k]$ 支撑.

L_k 的核 $L_k(x,y)$ 由下式给出

$$L_k(x,y) = \int_0^\infty \psi_t(x-u_1)b_1(u_1)\varphi_t(u_1-u_2)b_2(u_2) \cdots b_k(u_k)\varphi_t(u_k-y)m(t)\frac{dt}{t}.$$

因而

$$|L_k(x,y)| \leqslant \| b_1 \|_\infty \cdots \| b_k \|_\infty \| m \|_\infty$$
$$\times \int_0^\infty (|\psi_t| * |\varphi_t| * \cdots * |\varphi_t|)(x-y) \frac{dt}{t}.$$

注意到 k 个相同函数 $(1+|x|)^{-n-1}$ 的卷积上估为 $C(k,n)(1+|x|)^{-n-1}$，便得

$$\int_0^\infty t^{-n}(1+t^{-1}|x|)^{-n-1} \frac{dt}{\tau} = \frac{C(n)}{|x|^n}.$$

对于 $|L_k(x,y) - L_k(x'y,)|$，利用

$$|\psi_t(v) + \psi_t(u)| \leqslant C \frac{|v-u|^\alpha}{t^\alpha}(t^{-n}(1+t^{-1}|u|)^{-n-1}$$
$$+ t^{-n}(1+t^{-1}|v|)^{-n-1}),$$

其中 $0<\alpha<1$，并像上面那样推导即得

$$|L_k(x,y) - L_k(x',y)| \leqslant C_{k,\alpha}|x'-x|^\alpha$$
$$\times (|x-y|^{-n-\alpha} + |x'-y|^{-n-\alpha}).$$

对 $|L_k(x,y') - L_k(x,y)|$ 作同样的推理.

尚未利用假设$\int \psi(x)dx = 0$. 当利用 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理和归纳推理以证明算子 L_k 的连续性时，这一假设就要起作用.

今有 $P_t(1) = 1$，因而 $L_k(1) = L_{k-1}(b_k) \in \mathrm{BMO}$，这是由于 L_{k-1} 是一个 Calderon-Zygmund 算子，同样${}^tQ_t(1) = 0$，因而${}^tL_k(1) = 0$.

为证明弱连续性，需证明

$$\| L_k(\chi_\omega) \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C_k，\text{这里 } \chi_\omega(x) = \exp(i\omega \cdot x).$$

这里仍有 $L_k(\chi_\omega) = L_{k-1}^{(\omega)}(b_k \chi_\omega)$，其中在 $L_{k-1}^{(\omega)}$ 中，$m(t)$ 由 $m(t)\hat{\varphi}(t\omega)$ 代替.

这个推理的出发点是$\int_0^\infty Q_t m(t) \frac{dt}{t} = L_0$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界这一事实. 为证明它，我们注意 L_0 是一个卷积算子，其象征 $\int_0^\infty \hat{\psi}(+\xi)m(t) \frac{dt}{t}$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 事实上，由于 $|\psi(x)| \leqslant C(1+$

$|x|)^{-n-1}$ 和$\int\psi(x)dx = 0$，对 $0 < \alpha < 1$ 有 $|\hat{\psi}(\xi)| \leqslant C(\alpha)|\xi|^{\alpha}$. 当 $|\xi|$ 趋向于无穷时，对$\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)$ 分部积分即得(若 $|\xi_1| > |\xi_2| \geqslant \cdots \geqslant |\xi_n|$)

$$\frac{-i}{\xi_1}\int e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx,$$

它不超过 $C|\xi|^{-1}$.

我们来证明当 ϵ 趋向于 0 而 R 趋向于无穷时，算子 $L_k^{(\epsilon,r)}$ 的强收敛性.

设 f 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个向量子空间 V，V 由函数 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 组成，这里 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 在 0 的邻域内是零. 利用 Plancherel 等式可直接验证当 t 趋向无穷时 $\| P_t f \|_2 = O(t^{-1})$，而若 $0 < \alpha < 1$ 当 t 趋向于 0 时 $\| P_t f - f \|_2 = O(t^{\alpha})$.

把$\int_0^\infty Q_t \cdots B_k P_t m(t)\frac{dt}{t}$ 切断成$\int_0^1 + \int_1^\infty$，对 $L_k^{(\epsilon,r)}$ 也如此处理. 在所写出的第一个积分中，把 $P_t f$ 换成 f，这归结为研究 $L_{k-1}^{(\epsilon,r)}(b_k f)$ 的问题. 为此利用归纳假设. 第二个积分以及第一个中所带来的误差项是按范数收敛的，从而显然可过渡到极限.

定理 7 证毕. 再看几个变体. 对 $0 \leqslant j \leqslant k$，考虑算子

$$L_{j,k} = \int_0^\infty P_t B_1 - P_t B_j Q_t B_{j+1} P_t - B_k P_t m(t)\frac{dt}{t}, \quad (7.4)$$

我们约定 $L_{0,k}$ 由(7.1) 定义，而 $L_k = \int_0^\infty P_t B_1 \cdots P_t B_k Q_t m(t)\frac{dt}{t}$. 在假设(7.2) 和(7.3) 之下，所有这些算子都是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界的 Calderon-Zygmund 算子.

我们打算比较如此定义的算子和定理 1 所定义的算子. 为简化讨论，我们在两种情形下强化假设. 即假定(3.1) 对任意整数 N 皆满足(常数C 依赖于 N)，而在 McIntosh 手续中，假定 φ和 ψ属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 并且 ψ 的所有矩都是零.

那么有

命题 5　由(7.4)定义的算子 $L_{j,k}$ 是由定理 1 定义的算子的特殊情形.其中当 $\eta_{j+1}+\cdots+\xi=0$ 时 $\tau(\eta,\xi)=0$(而当 $\xi=0$ 时 $\tau(\eta,\xi)=0$,如果 $j=k$).

反之,所有由定理 1 产生的算子,若其核多重线性象征满足上述条件,可以表示成算子 $L_{j,k}$ 的一个收敛级数,$L_{j,k}$ 借助函数 φ,ψ,m 的不同选取来构造.

最后,所有由定理 1 定义的算子可表示成借助所有形如 $L_{j,k}(0\leqslant j\leqslant k)$ 的算子构成的一个收敛级数.

最后一个断言由前几个推出.事实上,设 $\chi_0(\eta,\xi),\cdots,\chi_k(\eta,\xi)$ 是 $k+1$ 个 0 阶齐次函数,它们在(0,0)之外无穷次可微,使得 $1=\chi_0(\eta,\xi)+\cdots+\chi_k(\eta,\xi)$,并且在 $\eta_1+\cdots+\eta_k+\xi=0$ 的一个锥形邻域内 $\chi_0(\eta,\xi)=0,\cdots$,最后,在 $\xi=0$ 的一个锥形邻域内 $\chi_k(\eta,\xi)=0$.如果限制在球 $|\eta|^2+|\xi|^2=1$ 上,那么这些条件的意义和 $\chi_0,\cdots,\chi_k$ 的存在性变得显然.这个球的紧集 $\xi=0,\eta_k+\xi=0,\cdots,\eta_1+\cdots+\eta_k+\xi=0$ 的交是空的,因而单位分解的存在性是经典的.

从满足(3.1)的一个多重线性象征 $\tau(\eta,\xi)$ 出发,把它分解为 $\chi_0(\eta,\xi)\tau(\eta,\xi)+\cdots+\chi_k(\eta,\xi)\tau(\eta,\xi)$.再对每一项应用第二个断言.

命题 5 的第一个断言是显然的.例如,L_k 的多重线性象征是

$$\begin{aligned}\tau(\eta,\xi)=\int_0^\infty &\hat{\psi}(t(\eta_1+\cdots+\eta_k+\xi))\\ &\times\hat{\varphi}(t(\eta_2+\cdots+\eta_k+\xi))\cdots\\ &\cdots\hat{\varphi}(t(\eta_k+\xi))\hat{\varphi}(t\xi)m(t)\frac{dt}{t},\end{aligned}\tag{7.5}$$

可直接验证(3.1).还可看出若 $m(t)$ 是常数,那么 $\tau(\eta,\xi)$ 是 0 阶齐次的.

第二个断言由我们曾使用过的分离变量法得到.现在我们在稍微精密的形式下使用它,这种形式在下列引理中叙述.先选定有

关记号.

用 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$ 表示紧支无穷次可微函数的赋予普通拓扑的 Schwartz 空间. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$ 的一个有界子集 $\mathscr{B}$ 是这样的 $f\in\mathscr{D}$ 的集合,这些 f 的紧支集含于一个固定的紧集并且其各阶导数都满足一个一致的从上的估计.

今有

引理 2 对所有有界子集 $\mathscr{B}\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$,存在两个序列 $g_j(x),b_j(x),j\in\mathbb{N}$,它们分别属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^p)$ 和 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^q)$ 的有界子集 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$,使得所有函数 $f\in\mathscr{D}$ 可表示为

$$f(x,y)=\sum_0^\infty\omega_j(x)g_j(x)k_j(y),\tag{7.6}$$

其中 $\omega_j(f)$ 是一个速降序列.

正如我们曾指出的那样,施行下列三个运算即得(7.6). 首先利用一个充分大的周期 T 把 f 关于每个变量周期化. 然后把这个周期化了的函数展成 Fourier 级数. 最后利用一个"截断"以把 $f(x,y)$ 从由周期化所得的多余项中分离出来.

这三步都是线性的,因而若对所有 $y,f(0,y)=0$,那么对所有 $j\in\mathbb{N},g_j(\sigma)=0$.

现在转向借助 McIntosh 手续对定理 1 的多重线性算子进行分析. 设 $\omega(\eta,\xi)$ 是 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n(k+1)})$ 的一个取正值或零的函数,假定它是辐射函数将会是方便的. 此外还设在 0 的邻域内 $\omega(\eta,\xi)=0$,并且自然设 ω 不恒等于零. 乘 ω 以一个常数,只要$(\eta,\xi)\neq(0,0)$,可设$\int_0^\infty\omega(t\eta,t\xi)\dfrac{dt}{t}=1$. 遂有

$$\tau(\eta,\xi)=\int_0^\infty\tau_t(t\eta,t\xi)\frac{dt}{t},\text{其中 }\tau_t(\eta,\xi)=\tau(t^{-1}\eta,t^{-1}\xi)\omega(\eta,\xi).$$

由于对所有 $N\geqslant1$(3.1) 满足,$\tau_t(\eta,\xi)$ 这些函数组成 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n(k+1)})$ 的一个有界子集. 我们要利用新变量 $\eta_1+\cdots+\eta_k+\xi$,

$\eta_2+\cdots+\eta_k+\xi,\cdots,\eta_k+\xi,\xi$ 借助引理 2 分解 $\tau_t(\eta,\xi)$. 更准确地说，我们要采用引理 2 的推广，其中两个变量换成 $k+1$ 个我们刚定义的变量. 分解 $\chi_0(\eta,\xi)\tau(\eta,\xi)$ 即得

$$\tau_t(\eta,\xi)=\sum_0^\infty m_j(t)a_{1,j}(\eta_1+\cdots+\eta_k+\xi)a_{2,j}(\eta_2+\cdots+\xi)\cdots$$
$$\cdots a_{k,j}(\eta_k+\xi)b_j(\xi), \quad (7.7)$$

其中

$\|m_j(t)\|_{L^\infty(0,\infty)}$ 是速降的， (7.8)

$a_{1,j}(0)=0$ 并且 $a_{1,j}$ 的所有导数在 0 是零. (7.9)

函数 $a_{1,j},\cdots,a_{k,j}$ 和 b_j 组成 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 的一个有界子集. (7.10)

为得结果，只需令

$$\hat{\psi}_j(\xi)=a_{1,j}(\xi),\hat{\varphi}_{1,j}=a_{2,j}(\xi),\cdots,\hat{\varphi}_{k,j}(\xi)=b_j(\xi).$$

那么就得到参与到 McIntosh 手续中的算子，不同的只是利用了 k 个不同的函数 φ.

对其余各项 $\tau(\eta,\xi)\chi_1(\eta,\xi),\cdots,\tau(\eta,\xi)\chi_k(\eta,\xi)$ 同样推理.

定理 1 和 McIntosh 的处理方法似乎是两个等价的道路. 不过这种说法并不准确. 事实上，函数和 Fourier 变换之间的相互变换总需要过多的假设，而且，举例来说，对 Calderon 交换子利用定理 1 中的多重线性形式进行分析，并不能得到正确的估计，这是因为所得到的多重线性象征没有足够的正则性.

反之，McIntosh 程序的功效在这些交换子的分析中显露出来. McIntosh 访问巴黎时(1980—1981)建议从等式

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\beta(x)-\beta(y))^k}{(x-y)^{k+1}}f(y)dy$$
$$=\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}[(I+iD)^{-1}B]^k(I+iD)^{-1}f\frac{dt}{t} \quad (7.11)$$

出发研究这些交换子. 其中 $D=-i\dfrac{d}{dx}$, $b(x)\in L^\infty(\mathbb{R})$, B 是由 $b(x)$ 定义的乘法算子，而 $\beta(x)$ 是 $b(x)$ 的一个原函数.

这个等式成了一条任意 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的 L^2

连续性的第一个证明的出发点([65]). 事实上,$(I+iD)^{-1}=P_t-iQ_t$,P_t 和 Q_t 借助 $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ 和 $\psi(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{sign} x\, e^{-|x|}$ 如前定义. 函数 ψ 不具有我们曾假定的正则性. 再注意到 P_t 是 t 的一个偶函数,Q_t 是一个奇函数,故 v. p. $\int_{-\infty}^{\infty}[(P_t-iQ_t)B]^k(P_t-iQ_t)\frac{dt}{t}$ 分解成一些项的和,每项至少包含一次算子 Q_t.

我们认出了定理 7 中的算子. 我们回想起当时写这个定理的证明时,还没准备好 $T(1)$ 定理,(7.11) 右端的算子的分析是这样进行的,借助若干技巧归结到形如 $\left[\int_0^{\infty}|Q_t(BP_t)^k|^2\frac{dt}{t}\right]^{1/2}$ 的二次泛函,再依靠适当的"Carleson 测度"估计它. 这意味着通向 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核的 L^2 连续性的所有道路本质上都利用 Carleson 测度这一基本材料. 如果回到 $T(1)$ 定理的证明,Carleson 测度出现在 BMO 的一个函数和 L^2 的一个函数之间的拟积的连续性的证明中.

8. 结　　论

尽管本章内我们叙述了若干结果,对于在本章意义下同平移和展缩可交换的多重线性算子 $\pi:(L^{\infty})^k\times L^2\to L^2$ 的了解还是初步的.

为说明这一看法,设 $k=n=1$,考虑双线性象征 $\pi(\eta,\xi)=\operatorname{sign}(\eta-\xi)$. 我们不知道与之相应的双线性算子是否从 $L^{\infty}\times L^2$ 到 L^2 有界. 当限制在定义在$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$上且是 0 阶齐次的函数 $\pi(\eta,\xi)$ 上时,可以设想安排 2π—— 周期函数的一个 Banach 空间 E,使得 $\pi(\cos\theta,\sin\theta)$ 在这个 Banach 空间 E 中的范数跟相应这个象征的算子 $\pi:L^{\infty}\times L^2\to L^2$ 的范数等价.

考虑到定理 1,我们仅仅知道 E 含于 $L^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$,并且对一个充分大的正则指数 $r>0$,C^r 含于 E.

回到 $\pi(\eta,\xi)=\text{sign}(\eta-\xi)$ 这一特殊情形，并进行对偶推理（跟定理 5 中所作的一样），可以下列方式重新提出这个问题：设 f 和 g 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$，令

$$h(x)=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(x+t)\,\frac{dt}{t}.$$

我们试图知道是否存在一个常数 C 使 $\|b\|_1\leqslant C\|f\|_2\|g\|_2$.

最后注意其象征满足定理1假设的多重线性算子还有其他值得注意的性质，即

$$\|\pi(a_1,\cdots,a_k,f)\|_r\leqslant C\|a_1\|_{p_1}\cdots\|a_k\|_{p_k}\|f\|_q,$$

只要 $1<p_1<\infty,\cdots,1<p_k<\infty,1<q<\infty,1<r<\infty$ 并且

$$1/r=1/p_1+\cdots+1/p_k+1/q.$$

这个不等式的证明远比我们曾介绍的极限情形 $p_1=\cdots=p_k=\infty$ 的研究容易，请读者参阅[68].

第 14 章　增生微分算子平方根的多重线性分析

1. 引　　言

本章我们讨论前章介绍的一般方法的一个应用. 考虑一个二阶微分算子 $L=-\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}\partial/\partial x_j(a_{j,k}(x)\partial/x_k)$，其中函数 $a_{j,k}(x)$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且矩阵 $A(x)=(a_{j,k}(x))_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ 满足下列条件：存在 $\delta>0$ 使对所有 $\xi\in\mathbb{C}^n$，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\operatorname{Re}\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}a_{j,k}(x)\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant\delta(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2).\tag{1.1}$$

考虑双线性形式 $J(f,g)=\int(Lf)g\,dx$ 就可看出设立这个条件的作用. 若 f 和 g 属于 Sobolev 空间 H^1，那么这个形式定义为 $J(f,g)=\int(A(x)\nabla f(x))\cdot\nabla g(x)dx$，其中 $A(x)=(a_{j,k}(x))_{1\leqslant j,k\leqslant n}$，$\nabla f=(\partial f/\partial x_1,\cdots,\partial f/\partial x_n)$.

那么条件(1.1)可以写成等价形式

$$\operatorname{Re}J(f,\bar{f})\geqslant\delta\|\nabla f\|_2^2.\tag{1.2}$$

T. Kato 建议研究算子 L 的增生的平方根 S. 下节我们定义 S. 问题(尚未解决)是证明 H^1 是 S 的定义域. 若 L 是自伴算子，即矩阵 A 是自伴的，这个结果是显然的. 事实上，这时 S 是自伴的和正的，并且有

$$\|S(f)\|_2^2=\langle S(f),S(f)\rangle=\langle L(f),f\rangle\geqslant\delta\|\nabla f\|_2^2.$$

在下列特殊情形下我们证明 Kato 的猜测，即假设 $\|A(x)-$

$I\|_{\infty}\langle\varepsilon(n),\varepsilon(n)\rangle 0$ 仅依赖于维数. 为此我们借助 L 的预解式把算子 $\sqrt{L}$ 表示成多重线性算子的级数，在经过若干处理之后，这些算子可借助 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理([96]) 进行分析. 作为结束我们重新回到 1 维，Kato 猜测的一个变体恰好提供由 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 核定义的算子.

2. 算子的平方根

从自伴情形开始. 设 H 是 Hilbert 空间(定义 H 的共轭双线性形式将记作 $\langle .1.\rangle$), $V\subset H$ 是一个稠密向量子空间，而 $T:V\to H$ 是一个线性算子. 我们说 T 是对称的，如果有 $\langle Tf,g\rangle=\langle f,Tg\rangle$. 算子 T 是以 V 为定义域的自伴算子，如果下列两个等价条件之一满足:

对于范数 $(\|T(f)\|^2+\|f\|^2)^{1/2}$ V 是完备赋范空间，

$$(2.1)$$

$T+iI:V\to H$ 是一个同构. $\quad(2.2)$

此外假设对所有 $f\in V$, $\langle Tf,f\rangle\geqslant 0$, 那么有一个且仅有一个自伴算子 S 使 $S^2=T$. S 的定义域 W 是 V 对于由 $(\langle Tf,f\rangle+\|f\|^2)^{1/2}$ 定义的范数的完备化. 最后在一个即将阐明的意义下有

$$S=\frac{1}{\pi}T\int_0^{\infty}(T+\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}d\lambda. \quad (2.3)$$

为解释(2.3)，我们考虑一个一般得多的情形，不再假设 T 是自伴的和正的，但设 T 具有下列性质

T 在一个稠密向量子空间 $V\subset H$ 上定义，且在 H 内取值.

$$(2.4)$$

对所有 $\lambda>0$, $T+\lambda I:V\to H$ 是一个同构. $\quad(2.5)$

存在一个常数 $C\geqslant 1$, 使对所有 $\lambda\geqslant 0$, 有 $\|(T+\lambda I)^{-1}\|\leqslant C\lambda^{-1}$. $\quad(2.6)$

在这些条件之下，存在一个开度 $2\alpha<\pi$ 的开角形区域 Ω, 它

以$]-\infty,0[$为分角线，使得对于所有$\zeta\in\Omega$，$T+\zeta I:V\to H$是一个同构，并且

$$\|(T+\zeta I)^{-1}\|\leqslant C|\xi|^{-1}\qquad(\zeta\in\Omega).$$

此外，函数$F(\zeta)=(T+\zeta I)^{-1}$在$\Omega$内全纯，$F(\zeta)$在$\mathscr{B}(H,H)$内取值，而$\mathscr{B}(H,H)$是以$H$到$H$内的连续线性算子的代数. 于是$T$的谱含于$\Omega$的余集$\sum$内，$\sum$由$|\theta|\leqslant\pi-\alpha$定义. 我们打算对所有$\varepsilon>0$在全纯象征算法的意义下定义算子$(T+\varepsilon I)^{-1/2}$.

我们注意到$T+\varepsilon I$的谱含于$\varepsilon+\sum$. 在$\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$内定义全纯函数$z^{-1/2}$(切口如图 2 所示). 用$\Gamma$表示完全含于$\Omega+\varepsilon\backslash]-\infty,0]$的一个路径，如图所示. 若令$T_\varepsilon=T+\varepsilon I$，则有

$$(T+\varepsilon I)^{-1/2}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\zeta-T_\varepsilon)^{-1}\zeta^{-1/2}d\zeta.\qquad(2.7)$$

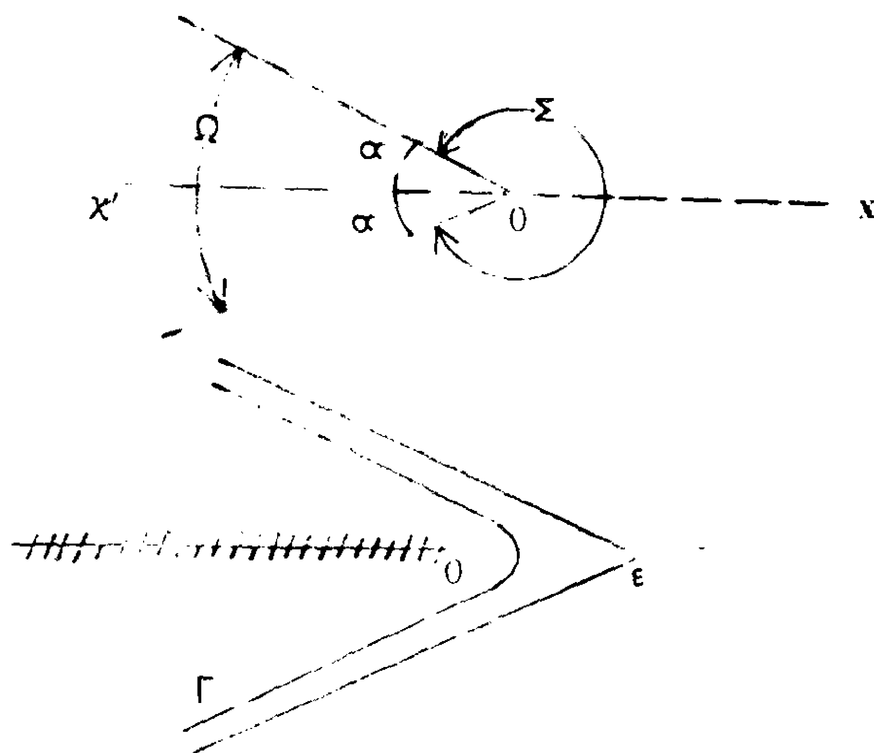


图 2

上述积分在$\mathscr{B}(H,H)$内取值并依范数收敛. 它不依赖路径Γ的选取，这是由于$(\zeta-T_\varepsilon)^{-1}$在$\Omega+\varepsilon$内全纯.

我们来验证$(T+\varepsilon)^{-1/2}(T+\varepsilon I)^{-1/2}=(T+\varepsilon I)^{-1}$.

为此利用两个不同的路径Γ_1和Γ_2,它们跟Γ同一类型,并且当ζ_1跑遍Γ_1而ζ_2跑遍Γ_2时,$|\zeta_1-\zeta_2|>\delta>0$.

依次对Γ_1和Γ_2写出(2.7),并把两个右端相乘.遂得

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint(\zeta_1-T_\varepsilon)^{-1}(\zeta_2-T_\varepsilon)^{-1}\zeta_1^{-1/2}\zeta_2^{-1/2}\,d\zeta_1 d\zeta_2,$$

为计算这个积分,利用预解式等式,

$$\begin{aligned}&(\zeta_1-T_\varepsilon)^{-1}(\zeta_2-T_\varepsilon)^{-1}\\&=(\zeta_2-\zeta_1)^{-1}[(\zeta_1-T_\varepsilon)^{-1}-(\zeta_2-T_\varepsilon)^{-1}].\end{aligned}$$

这就引导到两个积分,我们可以假定Γ_1包含在由Γ_2界定的凸开集内,那么有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\zeta_2-\zeta_1)^{-1}\zeta_2^{-1/2}\,d\zeta_2=0.$$

而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\zeta_2-\zeta_1)^{-1}\,\zeta_1^{-1/2}\,d\zeta_1=-\zeta_2^{-1/2}.$$

还剩下

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\zeta_2^{-1}(\zeta_2-T_\varepsilon)^{-1}\,d\zeta_2=T_\varepsilon^{-1}.$$

由于$T_\varepsilon^{-1}:H\to V$是一个同构,$T_\varepsilon^{-1/2}:H\to H$是一个单射算子.事实上,若$T_\varepsilon^{-1/2}(x)=0$,便有$T_\varepsilon^{-1}(x)=T_\varepsilon^{-1/2}(T_\varepsilon^{-1/2}(x))=0$,因而$x=0$.

为简化记号令$A=T_\varepsilon^{-1/2},B=T_\varepsilon T_\varepsilon^{-1/2}$.我们知道$BA=I$,我们要由此推导出(无界)算子$B$的定义域跟$A$的值域重合.我们已经知道$\mathrm{Im}\,A\subset\mathrm{Dom}\,B$.设$y\in\mathrm{Dom}\,B$.令$By=z=(BA)(z)=Bx$,其中$x=Az$.于是有$B(y-x)=0$.但$T_\varepsilon$和$T_\varepsilon^{-1/2}$二者都是单射;从而$B$也是单射.遂有$y=x$,从而$\mathrm{Dom}B\subset\mathrm{Im}A$.

我们验证这个定义域不依赖于$\varepsilon>0$.为此重新令$B_\varepsilon=T_\varepsilon T_\varepsilon^{-1/2}$,并注意到若$0<\varepsilon\leqslant\eta<\infty$,$B_\varepsilon-B_\eta\in\mathscr{B}(H,H)$.为简

化书写，注意到经由路径的显然变换可把(2.7)化成

$$T_\varepsilon^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (T_\varepsilon + \lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}d\lambda. \tag{2.8}$$

然后注意算子 $T(T+\lambda)^{-1}$ 在 $\mathscr{B}(H,H)$ 内的范数当 $\lambda > 0$ 时是一致有界的. 为证实这一点，只需写出 $T(T+\lambda)^{-1} = I - \lambda(T+\lambda)^{-1}$. 遂有 $T(T_\varepsilon^{-1/2} - T_\eta^{-1/2}) \in \mathscr{B}(H,H)$，由此推出 $B_\varepsilon - B_\eta \in \mathscr{B}(H,H)$.

这样就证明了下列引理.

引理 1 $(T+\varepsilon)^{-1/2}: H \to H$ 的值域 W 不依赖 $\varepsilon > 0$，并且这个值域是 $(T+\varepsilon I)(T+\varepsilon I)^{-1/2}$ 的定义域，今后记后一算子为 $(T+\varepsilon I)^{1/2}$. 最后还有在 V 上 $(T+\varepsilon I)^{1/2} = (T+\varepsilon I)^{-1/2}(T+\varepsilon I)$.

我们证明在 V 上 $T_\varepsilon^{1/2}T_\varepsilon^{1/2} = T_\varepsilon$. 事实上，所有 $y \in V$ 均可表示为 $y = T_\varepsilon^{-1}(x)$，这里 $x \in H$. 这允许写下

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^{1/2}\, T_\varepsilon^{1/2}(y) &= T_\varepsilon^{1/2}\, T_\varepsilon^{1/2}\, T_\varepsilon^{-1}(x) \\ &= T_\varepsilon^{1/2}(T_\varepsilon T_\varepsilon^{-1/2})(T_\varepsilon^{-1/2}\, T_\varepsilon^{-1/2})(x) \\ &= T_\varepsilon^{1/2}(T_\varepsilon T_\varepsilon^{-1})\; T_\varepsilon^{-1/2}(x) \\ &= T_\varepsilon^{1/2}\, T_\varepsilon^{-1/2}(x) = T_\varepsilon T_\varepsilon^{-1/2}\, T_\varepsilon^{-1/2}(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

我们已经指出当 $0 < \varepsilon \leqslant \eta < \infty$ 时 $T_\varepsilon^{1/2} - T_\eta^{1/2}$ 在 H 上有界. 这可精确化为

$$\| T_\varepsilon^{1/2} - T_\eta^{1/2} \| \leqslant C\sqrt{\eta}, \tag{2.9}$$

其中 C 是一个常数. 可以很简单地借助(2.8)验证(2.9)，留给读者去作. 由此推出当 x 属于算子 $T_\varepsilon^{1/2}$ 的定义域 W 时，$\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} T_\varepsilon^{1/2}(x)$ 存在. 收敛对 H 的范数成立，把这个极限记为 $T^{1/2}(x)$.

后面我们需要一个允许直接计算 $T^{1/2}$ 的积分表达式. 这个公式由下列命题提供，此外，这个命题概括了前面的讨论.

命题 1 在假设(2.4),(2.5)和(2.6)之下,首先由(2.8)定义算子 $T_\varepsilon^{-1/2}$,$\varepsilon>0$,值域 $W=T_\varepsilon^{-1/2}(H)$ 不依赖于 $\varepsilon>0$ 并且包含 V.

对所有 $x\in V$,积分 $\int_0^\infty T(T+\lambda)^{-1}(x)\lambda^{-1/2}d\lambda$ 是一个在 H 内取值的 Bochner 积分,它等于 $\int_0^\infty (T+\lambda)^{-1}T(x)\lambda^{-1/2}d\lambda$. 若 $x\in V$,定义

$$T^{1/2}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty T(T+\lambda)^{-1}(x)\lambda^{-1/2}d\lambda, \qquad (2.10)$$

这个算子 $T^{1/2}:V\to H$ 可扩张为 W 上的一个算子,仍记为 $T^{1/2}$,它的平方是 T.

第一个断言的验证十分简单. 把积分 $\int_0^\infty\cdots d\lambda$ 分成 $\int_0^1\cdots d\lambda+\int_1^\infty\cdots d\lambda$. 为处理第一个积分,注意到 $T(T+\lambda)^{-1}=1-\lambda(T+\lambda)^{-1}$,由于(2.6),这就给出 $\|T(T+\lambda)^{-1}\|\leqslant C$. 因此对所有 $x\in H$,积分 $\int_0^1\cdots d\lambda$ 收敛. 致于第二个积分,注意到对所有 $x\in V$ 有 $T(T+\lambda)^{-1}(x)=(T+\lambda)^{-1}T(x)$,因而 $\|T(T+\lambda)^{-1}x\|=O(\lambda^{-1})$. 这保证在无穷远点的收敛性.

为证明(2.10),回到 $T_\varepsilon=T+\varepsilon,\varepsilon>0,x\in V$,这时有

$$T_\varepsilon^{1/2}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_\varepsilon(T_\varepsilon+\lambda)^{-1}(x)\lambda^{-1/2}d\lambda. \qquad (2.11)$$

我们要应用 Lebesgue 控制收敛定理得到结论. 我们注意到,若 $0<\lambda\leqslant 1$,$\|T_\varepsilon(T_\varepsilon+\lambda)^{-1}\|\leqslant C$,若 $\lambda\geqslant 1$,对 $\varepsilon>0$ 一致地有 $\|(T_\varepsilon+\lambda)^{-1}\|\leqslant C\lambda^{-1}$. 最后,在第二种情形,若 $x\in V$,对 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 有 $\|T_\varepsilon(x)\|\leqslant C'$. 因而(2.11)的右端收敛到(2.10)的右端.

为了结束这些注解,注意到下列事实是适当的,即 $x\in V$ 的集合使(2.10)的右端是一个 Bochner 积分的 $x\in V$ 的集合一般说来严格含于 $T^{1/2}$ 的定义域 W 内. 这就是说,对于一个任意元素 $x\in$

W，积分(2.10) 未必是一个 Bochner 积分. 当 T 是一个增生微分算子时，这一困难将显示出来.

3. 增生平方根

以下我们限于讨论这样一个特殊情形，$T:V \to H$ 在 Kato ([151]) 意义下是一个极大增生算子. 这意味着

$$\text{对所有 } x \in V, \operatorname{Re}\langle T(x), x\rangle \geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$I + T: V \to H \text{ 是一个同构.} \tag{3.2}$$

作为介绍，我们验证前节的性质(2.5) 和(2.6) 是满足的. 我们要证明稍微精密一些的结果.

引理 2 一个算子 $T:V \to H$ 是极大增生的，当且仅当对所有 $\lambda > 0, T + \lambda: V \to H$ 是一个同构并且 $\|(T+\lambda)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}$.

因此极大增生算子不同于前节所研究的算子的地方在于(2.6) 中的常数等于 1.

假定(3.1) 和(3.2) 满足，而来证明(2.5). 为此只需验证 $S = 1-(1-\lambda)(1+T)^{-1}: H \to H$ 是一个同构. 事实上，$T+\lambda = S(1+T)$，因而 $T+\lambda: V \to H$ 将是一个同构.

$S: H \to H$ 的连续性是显然的. 为证明 S 是一个同构，只需证明存在一个常数 $\delta > 0$ 使对所有 $x \in H$ 有

$$\operatorname{Re}\langle S(x), x\rangle \geqslant \delta \|x\|^2. \tag{3.3}$$

为证明(3.3)，由于(3.2)可令 $x = (T+1)(y), y \in V$. 遂有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle S(x), x\rangle = \operatorname{Re}\langle (T+\lambda)y, (T+1)y\rangle \\
&= \lambda \|y\|^2 + (\lambda+1)\operatorname{Re}\langle T(y), y\rangle + \|T(y)\|^2 \\
&\geqslant \delta[\|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T(y), y\rangle + \|T(y)\|^2] = \delta\|x\|^2,
\end{aligned}$$

其中 $\delta = \inf(1, \lambda)$.

然后证明 $\|(T+\lambda)^{-1}x\| \leqslant \lambda^{-1}\|x\|$. 由于 $T+\lambda: V \to H$ 是

一个同构，可令 $x=(T+\lambda)y$，从而事情归结为检查 $\|(T+\lambda)(y)\|\geqslant\lambda\|y\|$ 当 $\lambda>0$ 是否成立. 由下面的推演知这是成立的.

$$\begin{aligned}\|(T+\lambda)(y)\|^2&=\|T(y)\|^2+2\lambda\operatorname{Re}\langle T(y),y\rangle+\lambda^2\|y\|^2\\&\geqslant\|T(y)\|^2+\lambda^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

反之，假定对所有 $\lambda>0$，$\|(T+\lambda)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1}$. 那么对所有 $x\in H$ 将有 $\|T(x)\|^2+2\lambda\operatorname{Re}\langle T(x),x\rangle+\lambda^2\|x\|^2\geqslant\lambda^2\|x\|^2$. 如果对某个 $x\in H$ 有 $\operatorname{Re}\langle T(x),x\rangle<0$，当 $\lambda>0$ 充分小时，这个不等式是不可能的.

还可证明下列结果.

引理 3 一个算子 $T:V\to H$ 是极大增生的，当且仅当 $I+T:V\to H$ 是一个同构并且 $S=(I-T)(I+T)^{-1}$ 是一个压缩.

压缩由 $\|S\|\leqslant1$ 定义. 一切都归结为证明当(3.2)成立时，验证(3.1)等价于 $\|(I-T)x\|\leqslant\|(I+T)x\|$. 只需把此式两边平方并展开所得的两端.

极大增生算子的象征算法的部分结果由 Von Ncumann 的经典定理提供，我们来回顾有关内容.

定理 1 设 H 是一个 Hilbert 空间，$S:H\to H$ 是一个压缩，而 $P(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_mz^m$ 是一个多项式. 则 $\|P(S)\|\leqslant\sup\limits_{|z|\leqslant1}|p(z)|$.

定理 1 的证明通过迂回到下列注释而间接用到增生算子的概念.

引理 4 设 $\|S\|<1$，则 $T=(I-S)^{-1}$ 是增生的，更精确地

说，对所有 $x \in H$，有 $\mathrm{Re}\langle Tx,x\rangle \geqslant \frac{1}{2}\|x\|^2$.

事实上，若令 $y = Tx$，一切归结为验证 $\mathrm{Re}\langle y,(I-S)y\rangle \geqslant \frac{1}{2}\langle y-Sy, y-Sy\rangle$，这等价于 $\|S(y)\| \leqslant \|y\|$.

今证定理1. 对 $0 \leqslant |z| < 1$，定义共轭双线性型 $B_z: H \times H \to \mathbb{C}$ 如下

$$B_z(x,y) = \langle x,y\rangle + \sum_1^{\infty}[z^k\langle S^k x,y\rangle + \bar{z}^k\langle (S^*)^k x,y\rangle].$$

收敛性由 $\|S\| \leqslant 1$ 和 $|z| < 1$ 保证. 由于引理4我们有

$$B_z(x,x) = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_1^{\infty} z^k\langle S^k x,x\rangle$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\,\langle (1-zs)^{-1}x,x\rangle - \|x\|^2 \geqslant 0.$$

Cauchy-Schwarz 不等式的证明则提供

$$|B_z(x,y)| \leqslant \sqrt{B_z(x,x)}\sqrt{B_z(y,y)}.$$

令 $z = re^{i\theta}, 0 \leqslant r < 1$，把 B_z 改记为 B_θ. 将有

$$\int_0^{2\pi}|B_\theta(x,y)|d\theta \leqslant \left[\int_0^{2\pi}B_\theta(x,x)d\theta\right]^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}B_\theta(y,y)d\theta\right]^{1/2}$$
$$= 2\pi\|x\|\,\|y\|.$$

为结束 Von Neumann 定理的证明，我们来计算积分

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}B_\theta(x,y)P(e^{-i\theta})d\theta = \langle P(rS)x,y\rangle.$$

假定 $\sup\limits_{|z|\leqslant 1}|P(z)| \leqslant 1$，$|I| \leqslant \|x\|\,\|y\|$，由此显然推知 $\|P(rs)\| \leqslant 1$，过渡到极限 $(r \to 1)$ 即得 $\|P(S)\| \leqslant 1$.

回到增生算子的象征算法. 用 A 表示在 $\mathrm{Re}\,z \geqslant 0$ 上连续当 $|z| \to +\infty$ 时趋向于一个极限并且在 $\mathrm{Re}\,z > 0$ 内全纯的所有函数组成的 Banach 代数. Von Neumann 定理的一个显然的推论是下列命题.

命题2　设$T:V\to H$是一个极大增生算子.则存在唯一的代数同态$\chi:A\to\mathscr{B}(H,H)$使得对所有$\lambda>0$,$\chi((\lambda+z)^{-1})=(\lambda+T)^{-1}$,并且对$f\in A$有$\|\chi(f)\|\leqslant\|f\|_{\infty}$.

为证明这个命题,通过变换$S=(I-T)(I+T)^{-1}$,把它归结为一个相应的叙述,即A是圆盘代数,而S是一个压缩.在这种情形下,命题由Von Neumann定理和多项式在代数A内的稠密性推导出来.

对于某些应用,把代数A稍许扩大一点儿成为代数B是适宜的,这里B由在$\mathrm{Re}z>0$内全纯在$\mathrm{Re}\,z\geqslant0$内连续的函数所组成.这次不再要求在无穷远点有极限.

若f属于B,那么对所有$\varepsilon>0$ $(1+\varepsilon z)^{-1}f(z)=f_{\varepsilon}(z)$属于$A$.因此对所有$x\in H$,$f_{\varepsilon}(T)$组成一个有界族.今证对所有$x\in H$,$f_{\varepsilon}(T)(x)$收敛到一个极限,把$f(T)(x)$定义为这个极限.由于$V$在$H$内稠密,可限于讨论$x\in V$.即令$x=(I+T)^{-1}y$,$y\in H$.这一切就相当$f(z)$用$g(z)=(1+z)^{-1}f(x)$代替.函数$(1+\varepsilon z)^{-1}g(z)$在赋予一致范数的$A$内收敛到$g(z)$蕴涵$f_{\varepsilon}(T)(I+T)^{-1}$按算子范数收敛到$g(T)$.由此得到$f_{\varepsilon}(T)$的强收敛性.

我们让读者细心验证$\chi:A\to\mathscr{B}(H,H)$到代数$B$的延拓仍是一个代数同态.

这些考虑的一个应用如下.令$f(z)=e^{-tz}$,$t\geqslant0$并构造$f(T)=S_t$.这就构造了一个以$-T$为无穷小生成元的压缩半群.这个半群具有下列性质:当$t\to0$时S_t强收敛到恒等算子.反之,所有强连续的压缩半群由一个极大增生算子产生.有兴趣的读者参考[151].

回到平方根问题.

若T是极大增生的,那么对所有$\lambda>0$,$T(T+\lambda)^{-1}$也是极大增生的.事实上,这个算子可写成$I-\lambda(T+\lambda)^{-1}$,而$\lambda(I+\lambda)^{-1}$是一个压缩算子.

算子$T(T+\lambda)^{-1}$的所有正系数的线性组合还是增生的，因而对所有$x\in V$，$\mathrm{Re}\langle T^{1/2}x,x\rangle\geqslant 0$. 由连续性，这个性质可推广到$W$. 即$T^{1/2}+I:W\to H$是一个同构. 我们回想起$W$定义为$(T+I)^{-1/2}$的值域. 因而一切归结为证明$(T^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}:H\to H$是一个同构.

为此，我们要把$(T^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}$跟$(T_\varepsilon^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}$加以比较.

首先注意正如上节我们曾经证明了的，$T^{1/2}:W\to H$是一个同构. 此外$T_\varepsilon^{1/2}$是增生的. 随之$T_\varepsilon^{-1/2}$也如是，因而$I+T_\varepsilon^{-1/2}:H\to H$是一个同构. 这个算子还可写成$(I+T_\varepsilon^{1/2})T_\varepsilon^{-1/2}$，因此$I+T_\varepsilon^{1/2}:W\to H$是一个同构.

终于得到$(T_\varepsilon^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}:H\to H$是一个同构.

今证存在一个常数$\gamma>0$，使当$0<\varepsilon\leqslant\eta$时($\eta>0$充分小)，对所有$x\in H$；有

$$\|(T_\varepsilon^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}x\|\geqslant\gamma\|x\|. \tag{3.4}$$

为证明(3.4)，首先注意$\|(T_\varepsilon^{1/2}+I)(y)\|^2\geqslant\|T_\varepsilon^{1/2}(y)\|^2+\|y\|^2$对所有$y\in W$成立，这是因为$T_\varepsilon^{1/2}$是增生的. 进而得到$\|T_\varepsilon^{1/2}-T^{1/2}\|\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$. 最后$T^{1/2}$和$(T+I)^{1/2}$相差一个在$H$上的有界算子，并且以$\|x\|+\|T^{1/2}x\|$为一方，以$\|(T+I)^{1/2}x\|$为另一方，构成$W$上的等价范数. 这一切综合起来即提供(3.4).

直接可见当$0<\varepsilon\leqslant 1$时$\|(T_\varepsilon^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}\|\leqslant C_0$. 最后得$(T^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}$是$H$到自身上的一个同构，这是因为这个算子跟$(T_\varepsilon^{1/2}+I)(T+I)^{-1/2}$之差的范数不超过$C_1\sqrt{\varepsilon}$，而$C_0$和$\gamma>0$都不依赖于$\varepsilon>0$.

总结上述讨论得

命题3 设$T:V\to H$是一个极大增生算子. 则存在一个极大

增生算子$T^{1/2}$，其定义域包含V并且其平方等于T. 我们有$W = (I + T)^{1/2}H$ 并且

$$T^{1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} T(T + \lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}d\lambda. \tag{3.5}$$

正如所指出的那样，当限制在$x \in V$上时，(3.5) 右端的积分是一个 Bochner 积分.

命题 3 可以精密化. 事实上存在唯一的极大增生算子L，其平方等于T. 读者可参看[151]，那里证明了这个断言.

4. 增生共轭双线性型

不指出如何构造极大增生算子$T:V \to H$，我们无从介绍有关理论的应用.

本节我们用H_0记 Hilbert 空间，而在此之前一直记作H. 设$H_1 \subset H_0$是一个稠密向量子空间，它对于一个记作$\langle \cdot, \cdot \rangle$的内积和记作$\| \cdot \|$的一个范数也是一个 Hilbert 空间. 至于$H_0$，内积记作$(\cdot, \cdot)$，而范数记作$| \cdot |$.

将假设单射$H_1 \subset H_0$是连续的：存在一个常数C使对所有$x \in H_1$有$|x| \leqslant C\|x\|$.

在我们将面对的应用中，$H_0 = L^2(\mathbb{R}^n)$，H_1 是 Sobolev 空间$H^1(\mathbb{R}^n)$，而$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \nabla g \, dx$.

Riesz 表示定理指出，对所有$y \in H_0$，存在一个元素$z \in H_1$使对所有$x \in H_1$，$(x, y) = \langle x, z \rangle$. 令$z = J(y)$，可以直接验证$J: H_0 \to H_1$是线性的，连续的和单射的. 用$H_2 \subset H_1$表示象$J(H_0)$，则有

$$\langle x, y \rangle = (x, J^{-1}(y)), x \in H_1, y \in H_2. \tag{4.1}$$

在具体例子中$J = (I - \Delta)^{-1}$，而H_2是 Sobolev 空间$H^2(\mathbb{R}^n)$.

最后把 $H_2 \to H_0$ 的算子记作 T. 所作的一切使 T 是一个正自伴算子. 这个初步的构造是我们现在要介绍的构造的一个特殊情形: $\langle x,y\rangle$ 用一个共轭双线性型 $B: H_1 \times H_1 \to \mathbb{C}$ 代替, B 具有下列性质, 对 $x \in H_1, y \in H_1, z \in H_1, \alpha \in \mathbb{C}$ 和 $\beta \in \mathbb{C}$ 有

$$B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x,z) + \beta B(y,z), \tag{4.2}$$

$$B(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} B(x,y) + \bar{\beta} B(x,z). \tag{4.3}$$

此外还假定存在两个常数 $C \geqslant \gamma > 0$ 使成立

$$|B(x,y)| \leqslant C \|x\| \|y\| \tag{4.4}$$

和

$$\operatorname{Re} B(x,x) \geqslant \gamma \|x\|^2. \tag{4.5}$$

暂不理会 Hilbert 空间 H_0. 存在一个同构 $S: H_1 \to H_1$ 使 $B(x, y) = \langle S(x), y\rangle$, 对所有 $x \in H_1, y \in H_1$ 成立.

利用上面介绍的同构 $T: H_2 \to H_0$, 令 $T_B = TS$. T_B 的定义域是由条件 $S(x) \in H_2$ 定义的子空间 $V \subset H_1$.

由构造 $S: V \to H_2$ 是(V 和 H_2 这两个 H_1 的子空间之间的)一个同构, 而 $T_B: V \to H_0$ 是一个同构.

由于(4.1), 对 $x \in V$ 和 $y \in H_1$ 有

$$B(x,y) = (T_B(x), y). \tag{4.6}$$

并且对 $x \in V$ 有

$$\operatorname{Re}\,(T_B(x), x) \geqslant \gamma |x|^2. \tag{4.7}$$

重要的是要注意到 T_B 和 V 并不是线性的依赖于 B. 算子 T_B 是极大增生的, 以 V 为定义域.

我们方才证明了下列结果.

命题 4 设 $B: H_1 \times H_1 \to \mathbb{C}$ 是一个满足(4.2), (4.3), (4.4)和(4.5)的共轭双线性型. 则存在一个子空间 $V \subset H_1$ 和一个极大增生算子 $T_B: V \to H_0$, 使对所有 $x \in V$ 和所有 $y \in H_1$, 有

$$B(x,y) = (T_B(x), y). \tag{4.8}$$

Kato 口头提出下列问题([151]). 我们刚定义的算子 T_B 的平方根 $T_B^{1/2}$ 的定义域 W 是否跟空间 H_1 重合?换言之,平方根的定义域是共轭双线性型的定义域吗?

A. MacIntosh 曾构造了第一个反例,从而指出不能希望在一般情形下有一个肯定的回答. 因而限于算子 $T = -\operatorname{div} A(x)\nabla$ 的平方根这一特殊情形是适当的,这里 $A(x)$ 满足引言中所给的条件. 我们就把这个特殊问题叫作 Kato 猜测,并将详细叙述.

5. Kato 猜测

从一个 $n \times n$ 的矩阵 $A(x)$ 出发,它的元素 $a_{j,k}(x)$,$1 \leqslant j,k \leqslant n$,属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们假定存在一个常数 $\delta > 0$ 使对几乎所有的 x,对所有向量 $(\zeta_1,\cdots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ 有

$$\operatorname{Re} \sum_1^n \sum_1^n a_{j,k}(x)\zeta_j\bar{\zeta}_k \geqslant \delta(|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2). \tag{5.1}$$

进而考虑在 $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ 上由

$$B(f,g) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_{j,k}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k}\, dx \tag{5.2}$$

定义的共轭双线性型 B. 遂有

$$|B(f,g)| \leqslant C \| \nabla f \|_2 \| \nabla g \|_2 \tag{5.3}$$

和

$$\operatorname{Re} B(f,f) \geqslant \delta \| \nabla f \|_2^2 \quad . \tag{5.4}$$

我们并不处在前节的框架之中,这是因为 $\| \nabla f \|_2$ 不是 f 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 内的范数. 为纳入这个框架考虑型 $B(f,g) + \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}\, dx = \tilde{B}(f,g)$. 借助 $\tilde{B}(f,g)$ 构造定义域为 V 的极大增生算子 $\tilde{T}_B$. 这个算子可写成 $\tilde{T}_B = T_B + I$, 并且有

$$B(f,g) = (T_B(f),g), \qquad f \in V, g \in H^1. \tag{5.5}$$

算子 T_B 是极大增生的;其定义域是 V. 回到借助一个增生型

构造一个极大增生算子的过程，可以直接验证 T_B 的定义域是使 div $(A(x)\nabla f)$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的向量子空间 $V\subset H^1(\mathbb{R}^n)$. 我们注意到 $A(x)\nabla f$ 是一个向量，其 n 个分量属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$. 因此这个向量的散度是在分布的意义下计算的.

T_B 的定义域的这个特征符合确定由复合无界算子所得的算子的定义域的一般规则：在复合的每一步，所有计算应当保持有意义. 最后可写出

$$T_B(f)=-\operatorname{div}(A(x))\nabla f.$$

Kato 猜测在于要知道 T_B 的增生的平方根的定义域是否是 $H^1(\mathbb{R}^n)$.

我们打算证明下列定理.

定理 2 对所有整数 $n\geqslant 1$，存在一个常数 $\varepsilon(n)>0$，使得若 $\|I-A(x)\|_\infty<\varepsilon(n)$，则 T_B 的增生平方根 $T_B{}^{1/2}$ 可写成

$$T_B^{1/2}=\sum_1^n R_j(A)D_j,\quad D_j=-i\partial/\partial x_j. \tag{5.6}$$

这里算子 $R_j(A)$ 在 $(L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n^2}$ 的开集 $\|I-A(x)\|_\infty<\varepsilon(n)$ 内是 $A(x)$ 的全纯函数，它在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子代数 $\mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))$ 内取值.

另外算子 $R_1(I),\cdots R_n(I)$ 是通常的 Riesz 变换.

最后还有，算子 $R_j(A)$，$1\leqslant j\leqslant n$，可扩张为从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内的，$2\leqslant p<\infty$，以及从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 内的连续算子.

定理显然蕴涵 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 含于 $T_B^{1/2}$ 的定义域 W 内. 我们验证一旦对矩阵 $A(x)$ 和它的伴随矩阵 $A^*(x)$ 证明了定理，那么这个定理就蕴涵 $W=H^1(\mathbb{R}^n)$. 把 B 的伴随型记作 B^*：$B^*(f,g)=\overline{B(g,f)}$. 那么 T_B 的伴随算子 T_B 是 T_{B^*}，而 $T_B^{1/2}$ 的伴随算子是 $T_{B^*}^{1/2}$；为验证后一性质，只需回想积分表达式(2.10).

这样就有$B(f,g)=(T_B f,g)=({T_B}^{1/2}{T_B}^{1/2}f,g)=({T_B}^{1/2}f,$ ${T_{B^*}}^{1/2}g)$ 只要 f 属于 T_B 的定义域V 并且 g 属于 $H^1(\mathbb{R}^n)$. 我们得到了 $B(f,g)=({T_B}^{1/2}f,{T_{B^*}}^{1/2}g)$，并且可把这个等式扩张到 $H^1(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)$ 上.

若 $g=f$ 则有

$$\begin{aligned}\delta\|\nabla f\|_2^2 &\leqslant \operatorname{Re} B(f,f)\doteq \operatorname{Re}({T_B}^{1/2}f,{T_{B^*}}^{1/2}f)\\ &\leqslant \|{T_B}^{1/2}f\|_2\|{T_{B^*}}^{1/2}f\|_2,\end{aligned}\tag{5.7}$$

由于我们假定了 $\|{T_{B^*}}^{1/2}f\|_2\leqslant C\|\nabla f\|_2$，故有 $\|{T_B}^{1/2}f\|_2\geqslant \delta C^{-1}\|\nabla f\|_2$，从而 ${T_B}^{1/2}$ 的定义域W 就是 $H^1(\mathbb{R}^n)$.

6. 相应于 Kato 猜测的多重线性算子

沿用第 13 章叙述的基本思想，我们打算构造定理 2 的算子 R_j，为此要算出它们的多重线性算子的级数展开式，并建立级数的收敛性.

为简化记号，以下把 T_B 记为 T. 最大增生算子 T_B 已在前节定义，我们要证明它的增生平方根 $\sqrt{T}$ 可写成

$$\sqrt{T}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}R_{j,m}(A)D_j,\tag{6.1}$$

其中 $D_j=-i\,\partial/\partial x_j$，而算子 $R_{j,m}(A)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 并将证明存在一个仅依赖于维数的常数$C=C(n)>0$，使得 $R_{j,m}:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的范数 $\|R_{j,m}(A)\|$ 对所有 $m\geqslant 1$ 满足

$$\|R_{j,m}(A)\|\leqslant C^m\|A(x)-I\|_\infty^m.\tag{6.2}$$

算子 $R_{j,0}(A),1\leqslant j\leqslant n$，不依赖于 A，它们是通常的 Riesz 变换.

一旦(6.2) 建立，$\sqrt{T}:H^1(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的连续性将是直接可得的，只要 $C\|A(x)-I\|_\infty\leqslant 1$.

算子 $R_{j,m}(A)$ 关于 $B=I-A^{-1}$ 是多重线性的，并将在 McIntosh 的形式内(第 8 章，第 7 节)分析. 对它们结构的分析使我

们得以处理一个更一般的情形，我们将忘掉 Kato 问题，以便在这一般的框架内更加自由.

回到等式(3.5). 作变量替换 $\lambda = t^{-2}, t > 0$. 这一变量替换的好处在于 t 有重要的几何意义.

从预解式 $(I + t^2T)^{-1}$ 的多重线性展开出发，通过关于 t 的积分，将得到 $T^{1/2}$ 的多重线性展开.

为了计算这个预解式，我们写出(在无界算子复合的意义下) $t^2T = UAV$，这里 $V = t\nabla : H^1(\mathbb{R}^n) \to (L^2(\mathbb{R}^n))^n$，$\nabla$ 是梯度算子，A 是由矩阵 $A(x)$ 定义的逐点乘法算子，$U = -t\ \mathrm{div}\ : E \to L^2(\mathbb{R}^n)$，其中 $E \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ 是散度算子的定义域.

几个现成的注释后面将是有用的. 沿用刚才引进的记号，我们有 $I + UV = I - t^2\Delta$，这里 $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$，而 $(I + UV)^{-1}U = Q_t = -(I - t^2\Delta)^{-1}t\ \mathrm{div}$. 算子 Q_t 是一个卷积算子，它的象征是 $\left(\frac{-it\xi_1}{1 + t^2|\xi|^2}, \cdots, \frac{-it\xi_n}{1 + t^2|\xi|^2}\right)$. 算子 $Z_t = I - t\nabla Q_t$ 也是一个卷积算子，这是一个 0 阶的经典伪微分算子，其矩阵象征是

$$\left(\left(\delta_{j,k} - \frac{t^2\xi_j\xi_k}{1 + t^2|\xi|^2}\right)\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n},$$

这里若 $j \neq k, \delta_{j,k} = 0$，若 $j = k, \delta_{j,k} = 1$.

Riesz 变换 R_j 的象征是 $\xi_j/|\xi|$. 若令 $P_t = (I - t^2\Delta)^{-1}$，我们可以写下

$$Z_t = ((\delta_{j,k}I - (I - P_t)R_j R_k))_{1\leqslant j,k\leqslant n}.$$

我们来阐明 t 的意义. 算子 P_t 是一个由 φ_t 定义的卷积算子；今有 $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$，这里 φ 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$. 更精确地说，若 $|x| \geqslant 1$，对所有整数 $m \geqslant 1$，有 $|\varphi(x)| + |\nabla\varphi(x)| \leqslant C_m|x|^{-m}$，而若 $|x| \leqslant 1$，有 $|\varphi(x)| \leqslant C|x|^{-n+1}$ 和 $|\nabla\varphi(x)| \leqslant C|x|^{-n}$. 这表明 $\varphi(x)$ 本质上由单位球支撑，并且本质上 P_t 的“作用半径”是 t. 同样的注释对 Q_t 有效，不过有两点不同. 我们有 $Q_t(f) = f * \psi_t$，这里 $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$. 这次 ψ 是向量值的，属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 并满足 $\int\psi(x)dx = 0$，

而前面我们有$\int\varphi(x)dx=1$. 另外,$\psi(x)$具有跟$\varphi(x)$相同的正则性和局部性.

算子Z_t的情况是类似的,只是在原点的奇异性更加严重. 事实上,存在一个缓增分布$Z\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,使得$Z_t$的分布核是$t^{-n}Z\left(\frac{x-y}{t}\right)$. Z在$|x|\geqslant 1$的限制跟 Schwartz 类$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$的一个函数在$|x|\geqslant 1$的限制相同,$Z$在$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$是无穷次可导的,而$Z_t$的作用半径还是$t$.

从上述分析我们得到$Z_t=\rho_t+\pi_t$,其中奇异部分ρ_t的分布核由$|x-y|\leqslant t$支撑,而π_t是由$w_t(x)=t^{-n}w(x/t)$定义的一个卷积算子,$w(x)$属于 Schwartz 类$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

回到$(I+t^2T)^{-1}$的计算. 由矩阵$A(x)$定义的乘法算子记作A. 令$A^{-1}(x)=I-B(x)$,用B表示由矩阵$B(x)$定义的乘法算子. 我们把$(I+t^2T)^{-1}$展成算子B的幂级数,为此要用到下列值得注意的等式

$$(I+UAV)^{-1}UA=Q(I-BZ)^{-1},\tag{6.3}$$

其中U,A,V现在是某个结合代数的任意三个元素,$Q=(I+UV)^{-1}U$,$Z=I-VQ$,显然要假设所有写出的逆实际上都存在.

(6.3) 的验证是一个代数练习题,留给读者. 在验证过程中算子U,A,V的意义不起任何作用.

在我们所关心的情形,$Z=Z_t:(L^2(\mathbb{R}^n))^n\to(L^2(\mathbb{R}^n))^n$是有界的,并且算子$Z_t$的范数不依赖于$t$. 由此得知$BZ=BZ_t$的范数严格小于1,只要$\|I-A(x)\|_\infty<\varepsilon(n)$,$\varepsilon(n)>0$充分小. 于是可以把(6.3) 的右端展开成一个 Neumann 级数$\sum_0^\infty Q(BZ)^m$. 回到(3.5),我们得

$$T^{1/2}=\sum_1^n R_j(A)D_j,\tag{6.4}$$

其中

$$\begin{bmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_t(I - BZ_t)^{-1}\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty L_m, \tag{6.5}$$

而

$$L_m = \int_0^\infty Q_t(BZ_t)^m\frac{dt}{t} \quad . \tag{6.6}$$

我们打算证明存在一个常数 $C = C(n)$ 使得对所有 $m \geqslant 1$，$\|L_m\| \leqslant C^m \|B\|^m$. 这就允许在条件 $C\|B\| < 1$ 之下证明算子 $R_j(A)$ 的连续性，若 $\|I - A(x)\|_\infty < \varepsilon(n)$，$\varepsilon(n) > 0$ 充分小，则上述条件成立.

暂时部分地忘掉前面的内容，而来研究算子 L_m 的一种更简单且更一般的形式.

作为开始，我们仅考虑数量算子，它是前面的矩阵算子的元素.

首先看卷积算子. 用 P_t（相应地 Q_t）表示用 φ_t（相应地 ψ_t）定义的卷积算子，这里 $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$，$\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$. 函数 φ 和 ψ 满足前面叙述的条件：当 $|x| \leqslant 1$ 时，$|\varphi(x)| \leqslant C|x|^{-n+1}$，$|\nabla\varphi(x)| \leqslant C|x|^{-n}$，$\psi(x)$ 也如是，而当 $|x| \geqslant 1$ 时，φ，ψ 以及它们的梯度在无穷远是速降的. 最后还有 $\int\varphi(x)dx = 1$，而 $\int\psi(x)dx = 0$.

设 $m(\xi)$ 是一个在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 内无穷次可导并且 0 阶齐次的函数：对所有 $\lambda > 0$ 和所有 $\xi \neq 0$，$m(\lambda\xi) = m(\xi)$. 在 Kato 问题的特殊情形，$m(\xi)$ 是函数 $\xi_j\xi_k/|\xi|^2$ 当中的一个. 设 $R: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是卷积算子，其象征（或乘子）是 $m(\xi)$. 那么 R 是一个 Calderon-Zygmund 算子，因此当 $1 < p < \infty$ 时它在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的.

最后一个假设是算子 $R_t = (1 - P_t)R$ 的分解，即 $R_t = \rho_t + \pi_t$，这里 ρ_t 的分布核由 $|x - y| \leqslant t$ 支撑，而 π_t 是由 $2\sigma_t(x) = t^{-n}w(x/t)$ 定义的卷积算子，$w(x)$ 属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

我们注意到当 $1 < p < \infty$ 时,算子 ρ_t 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的,并且它的范数不依赖于 t.

用 $B_1,\cdots,B_m$ 表示由 $b_1,(x),\cdots,b_m(x)$ 定义的逐点乘法算子;我们假定 $\|b_1\|_\infty \leqslant 1,\cdots,\|b_m\|_\infty \leqslant 1$,以致 $B_1,\cdots,B_m$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩算子.

在这些记号和假设之下,定理 2 的一个推广由下列定理提供.

定理 3 存在一个仅依赖于函数 φ 和 ψ 以及算子 R 的常数 C,使得对所有整数 $m \geqslant 1$ 和所有函数 $\mu(t) \in L^\infty(0,\infty)$,积分 $\int_0^\infty Q_t \cdot B_1 R_t \cdots B_m R_t \mu(t) \frac{dt}{t}$ 强收敛到一个算子 $L_m: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$,它的范数不超过 $C^m \|\mu\|_\infty$.

此外,存在一个常数 C',使得 L_m 的分布核在对角面的余集上的限制 $L_m(x,y)$ 满足

$$\int_{\{|x-y|\geqslant 2|x'-x|\}} |L_m(x,y) - L_m(x',y)|dy \leqslant C'^m \|\mu\|_\infty. \tag{6.7}$$

本章所有余下部分用来证明定理 3. 为此,我们引进算子 L_m 的两个变体,它们是

$$L_m^{(1)} = \int_0^\infty Q_t B_1 R_t \cdots B_{m-1} R_t B_m P_t \mu(t) \frac{dt}{t}$$

和

$$L_m^{(2)} = \int_0^\infty Q_t B_1 R_t \cdots B_{m-1} R_t B_m W_t \mu(t) \frac{dt}{t},$$

其中 W_t 和 P_t 是同一类型的,函数 φ 由 Gauss 函数 $\pi^{-n/2} e^{-|x|^2}$ 代替.

三个算子 L_m,$L_m^{(1)}$ 和 $L_m^{(2)}$ 彼此以下列方式相互联系.

首先,我们有 $L_m = L_{m-1} B_m R - L_m^{(1)} R$,这是由于 $R_t = (I - P_t)R$.

因此,L_{m-1} 与 $L_m^{(1)}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性蕴涵 L_m 的连续性.

其次，$L_m^{(1)} - L_m^{(2)}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续算子. 为了确信这一事实，我们更一般地考虑形如 $J = \int_0^\infty Q_t A_t \tilde{Q}_t \frac{dt}{t}$ 的算子，其中 Q_t 和 $\tilde{Q}_t$ 跟定理 3 中的算子 Q_t 有相同的定义，并且 $A_t : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的算子范数是关于 t 一致有界的. 这样一个算子 J 正如下列引理所指出的在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

引理 5 沿用前面的记号，积分 $\int_0^\infty Q_t A_t \tilde{Q}_t \frac{dt}{t}$ 强收敛到一个在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续的算子.

我们首先假定当 $0 < t < \varepsilon$ 和 $t > R$ 时 $A_t = 0$，并证明对相应算子 $J = \int_0^\infty Q_t A_t \tilde{Q}_t \frac{dt}{t}$ 的一个一致估计. 然后由此得到积分关于 t 的收敛性.

为估计 $\|J\|$，我们来计算当 $\|f\|_2 \leqslant 1$ 和 $\|g\|_2 \leqslant 1$ 时的 (Jf,g) 的值. 今有

$$(Jf,g) = \int_0^\infty (A_t \tilde{Q}_t f, Q_t^* g) \frac{dt}{t},$$

而 Canchy-Schwarz 不等式给出

$$|(Jf,g)| \leqslant \left(\int_0^\infty \|A_t \tilde{Q}_t f\|_2^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \|Q_t^* g\|_2^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

算子 A_t 的连续性允许以 $C_0 \|\tilde{Q}_t f\|_2$ 代替 $\|A_t \tilde{Q}_t f\|_2$. 算子 $Q_t \tilde{Q}_t$ 和 Q_t^* 有同样的结构，因而只需证明

$$\left(\int_0^\infty \|Q_t f\|_2^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leqslant C_1 \|f\|_2. \tag{6.8}$$

为验证(6.8)，我们利用 Plancherel 公式，便归结为估计重积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \frac{dt}{t}. \tag{6.9}$$

从加在 ψ 上的条件推出，当 $|\xi| \leqslant 1$ 时 $|\hat{\psi}(\xi)| \leqslant C_2 |\xi|$，而当

$|\xi| \geqslant 1$ 时 $|\hat{\varphi}(\xi)| \leqslant C_\delta |\xi|^{-\delta}, \delta \in]0,1[$. 由此得

$$\int_0^\infty |\hat{\varphi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \leqslant C_3, \qquad (6.10)$$

由此得(6.8).

为证明定义 J 的积分的强收敛性，必须对在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的固定的 f 证明当 T 趋向于无穷(且 $T' > T$) 时或 T' 趋向于 0 时 $\left\| \int_T^{T'} Q_t A_t \tilde{Q}_t f \frac{dt}{t} \right\|_2$ 趋向于 0. 重新进行前述的计算，这就归结为找 $\int_{\mathbb{R}^n} \int_T^{T'} |\hat{\varphi}(t\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \frac{dt}{t}$ 的极限. 考虑到(6.10)，Lebesgue 控制收敛定理允许得到上述结论.

由上可知算子 L_m 的研究直接归结为算子 $L_m^{(2)}$ 的研究. J. L. Journé 曾经证明 $L_m^{(2)}$ 的核 $L_m^{(2)}(x,y)$ 满足 Calderon-Zygmund 核的条件. 这就导致利用 $T(1)$ 定理以证明 $L_m^{(2)}$ 的 L^2 连续性. 由于 $W_t(1) = 1$，遂得

$$L_m^{(2)}(1) = L_{m-1}(b_m). \qquad (6.11)$$

这意味着我们就要叙述的归纳推理要经历算子 L_m 和 $L_m^{(2)}$ 之间的一个曲折，并且必须证明(6.7). (6.7) 的证明将是直接的，无需基于归纳推理. 这就得到一个常数 C'，对 $L_m^{(2)}$ 应用 $T(1)$ 定理则可证明

$$\| L_m^{(2)} \| \leqslant C_0 \| L_{m-1} \| + C'^{m-1}, \qquad (6.12)$$

由此推得

$$\| L_m \| \leqslant C_0 \| L_{m-1} \| + C'^{m-1} + C_1. \qquad (6.13)$$

不等式(6.13)提供所说的算子 L_m 的增长性.

在结束本节之前，我们来说明归纳如何起动以及如何验证 $T(1)$ 定理的其余假设.

算子 L_0 由 $L_0 = \int_0^\infty Q_t \mu(t) \frac{dt}{t}$ 给定. 这是一个卷积算子. 相应的象征是 $\int_0^\infty \hat{\varphi}(t\xi)\mu(t) \frac{dt}{t}$，并且援引我们曾用过的 $\hat{\varphi}$ 的估计不难

验证这个象征属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

为了证明弱连续性，我们利用第 8 章的命题 6. 今令 $\chi_\xi(x) = \exp(ix\cdot\xi)$ 并且致力于估计 $L_m^{(2)}(\chi_\xi)$ 在空间 BMO 内的范数.

今有

$$L_m^{(2)}(\chi_\xi) = L_{m-1}^{(\xi)}(\chi_\xi\, b_m), \tag{6.14}$$

其中 $$L_{m-1}^{(\xi)} = \int_0^\infty Q_t\, B_1\, R_t \cdots B_{m-1}\, R_t \exp\left(-t|\xi|^2/4\right)\mu(t)\,\frac{dt}{t}.$$

同样的推理将给出 $L_m^{(1)} \in \mathrm{BMO}$ 和 $L_m^{(2)}(\chi_\xi) \in \mathrm{BMO}$，仅有的区别是从一种情形到另一种情形 $\mu(t)$ 改变了.

由于 $\int\psi(x)dx = 0$，最后还有 ${}^tL_m^{(2)}(1) = 0$.

本章余下的部分将用于已提到过的 L_m 和 $L_m^{(2)}$ 的核的性质的验证.

这些验证一旦实现，定理 2 和 3 即被证毕.

7. 核 $L_m^{(2)}(x,y)$ 的估计

首先考虑一个典型情况以阐明随后的计算. 考查一个算子

$$L = \int_0^\infty P_t\, A_t \widetilde{P}_t \frac{dt}{t}, \tag{7.1}$$

其中 P_t（相应地 $\widetilde{P}_t$）是由 φ_t（相应地 $\widetilde{\varphi}_t$）定义的卷积算子，这里 $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$，但跟我们将要处理的情况不同，$\varphi$ 和 $\widetilde{\varphi}$ 是两个 C^1 类由单位球支撑的函数，另外，我们还假定算子 $A_t: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的范数 $\|A_t\|$ 满足 $\|A_t\| \leqslant C_0$. 并且 A_t 的分布核 $A_t(x,y)$ 限制在 $|x-y| > t$ 时恒等于零. 沿用曾用过的一个术语，A_t 的作用半径不超过 t. 在这些条件下，我们的算子 L 的分布核 $K(x,y)$ 满足估计

$$|K(x,y)| \leqslant C_1|x-y|^{-n}, \tag{7.2}$$

$$|\partial/\partial x_j\, K(x,y)| + |\partial/\partial y_j\, K(x,y)| \leqslant C_1|x-y|^{-n-1}. \tag{7.3}$$

为简化一些计算，我们将假设 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 是偶的实函数. 令 $\varphi_t^{(x)}(u) = \varphi_t(u-x)$，$\tilde{\varphi}_t^{(y)}(v) = \tilde{\varphi}_t(v-y)$. 核 $K(x,y)$ 由三层积分

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x-u) A_t(u,v) \tilde{\varphi}_t(v-y)\, du dv \frac{dt}{t}$$

给定，其中 $A_t(u,v)$ 是算子 A_t 的分布核. 返回算子 A_t，我们就有

$$K(x,y) = \int_0^\infty \langle A_t \tilde{\varphi}_t^{(y)}, \varphi_t^{(x)} \rangle \frac{dt}{\tau}. \tag{7.4}$$

为了从上估计 $|K(x,y)|$，我们利用下面两个平凡的注释. 对 $t>0$ 我们有 $|\langle A_t \tilde{\varphi}_t^{(y)}, \varphi_t^{(x)} \rangle| \leqslant C_0 \| \tilde{\varphi}_t^{(y)} \|_2 \| \varphi_t^{(x)} \|_2 = Ct^{-n}$. 另外，若 $|x-y|>3t$，$\langle A_t \tilde{\varphi}_t^{(y)}, \varphi_t^{(x)} \rangle = 0$，因为这时 $\varphi_t^{(x)}$ 和 $\tilde{\varphi}_t^{(y)}$ 的支集互不相交. (7.4) 右端的积分 $\int_0^\infty \cdots \frac{dt}{t}$ 事实上表示成 $\int_{|x-y|/3}^\infty \cdots \frac{dt}{t}$，其估计是直接了当的.

(7.3) 的验证是类似的，留给读者.

算子 $L_m^{(2)}$ 的核 $L_m^{(2)}(x,y)$ 的处理按刚描述的框架进行. 不过有两个新的困难. 第一个困难涉及到函数(φ_t 或 ψ_t) 或与之连带的算子(R_t) 的局部性. 这个局部性不再是严格的，而仅仅是近似的. 第二个困难是定义算子 Q_t 的函数 ψ 不属于 L^2，而仅属于 L^p，$1<p<\frac{n}{n-1}$. 代替利用 A_t 在空间 L^2 上的连续性，我们将利用 A_t 在空间 L^p 上的连续性. 但一看便知，我们利用的第二个函数 $\tilde{\varphi}$ 必须属于 L^q，这里 $1/q+1/p=1$；以使 $\langle A_t \tilde{\varphi}_t^{(y)}, \varphi_t^{(x)} \rangle$ 有意义. 算子 $L_m^{(1)}$ 决不属这种情形，这是由于用来构造算子 Q_t 和 P_t 的函数 ψ 和 φ 有相同的奇异性. 反之，对算子 $L_m^{(2)}$ 来说，一切进展顺利，这是由于 φ 由 Gauss 函数代替，而后者属于所有空间 L^q.

现在进入证明的细节. 下列引理属于 J. L. Journé，我们先明确有关记号. 考虑两个属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 的非负的放射函数 $a(x)$ 和 $b(x)$，在球 $|x| \leqslant 1$ 上，$c(x) = (a*b)(x) = 1$. 若 $p \in]1,\infty[$ 和 q 是两个共轭指数，令 $\alpha(x) = (a(x))^p$，$\beta(x) = (b(x))^q$. 我们有

引理 6 设 $T:L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子，其分布核由 $|x-y|\leqslant r$ 支撑. 则对所有函数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 和所有函数 $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|\langle Tf,g\rangle|\leqslant \|T\| \int_{\mathbb{R}^n}(|f|^p*\alpha_r)^{1/p}(|g|^q*\beta_r)^{1/q}dx \tag{7.5}$$

其中 $\alpha_r(x)=r^{-n}\alpha(x/r),\beta_r(x)=r^{-n}\beta(x/r)$.

这个不等式补充了由 T 的连续性提供的显然的估计 $|\langle Tf,g\rangle|\leqslant \|T\|\ \|f\|_p\|g\|_q$. 对(7.5)右端应用 Hölder 不等式，就会发现又回到显然的估计. 如果与由 r 给定的尺度比较，在 $|f|$ 是小的地方 $|g|$ 是大的，反之亦然，不等式(7.5)特别有意义.

为证明引理 6，我们写出

$$\langle Tf,g\rangle=\iint T(x,y)f(y)g(x)dydx$$
$$=\iint T(x,y)c\left(\frac{x-y}{r}\right)f(y)g(x)dydx.$$

而 $c\left(\frac{x-y}{r}\right)=r^{-n}\int a\left(\frac{y-u}{r}\right)b\left(\frac{u-x}{r}\right)du$，遂有

$$c\left(\frac{x-y}{r}\right)f(y)g(x)=\int f_u(y)g_u(x)du,$$

其中 $f_u(y)=r^{-n/p}a\left(\frac{y-u}{r}\right)f(y)$，$g_u(x)$ 有同样表达式. 从而从 T 的连续性推出

$$|\langle Tf,g\rangle|=\left|\int\langle Tf_u,g_u\rangle du\right|\leqslant\|T\|\int\|f_u\|_p\ \|g_u\|_q du$$
$$=\|T\|\int_{\mathbb{R}^n}(|f|^p*\alpha_r)^{1/p}(|g|^q*\beta_r)^{1/q}du.$$

这里是引理 6 的第一个应用. 用 $p_t(x)=t^{-n}p(x/t)$ 表示 Poisson 核：$p(x)=c_n(1+|x|^2)^{-(n+2)/2}$，其中 $c_n>0$ 由 $\int p(x)dx=1$ 确定. 把由 $S_t^{(1)}(x,y),S_t^{(2)}(x,y)$ 定义的两个算子记作 $S_t^{(1)},S_t^{(2)}$,

两个核满足 $|S_t^{(1)}(x,y)| \leqslant C\, p_t(x-y)$，$|S_t^{(2)}(x,y)| \leqslant C\, p_t(x-y)$ 以及 $|\partial/\partial x_j S_t^{(1)}(x,y)| + |\partial/\partial y_j S_t^{(2)}(x,y)| \leqslant Ct^{-1}p_t(x,y)$，$1 \leqslant j \leqslant n$.

现在考虑算子 $L = \int_0^\infty S_t^{(1)} A_t S_t^{(2)} \frac{dt}{t}$，其中 A_t 满足跟在典型情形同样的假设. 那么 L 的分布核限制在 $y \neq x$ 上时仍满足(7.2)和(7.3). 为看出这一事实，令

$$f_{(t,y)}(u) = S_t^{(2)}(u,y), g_{(t,x)}(u) = \bar{S}_t^{(1)}(x,u),$$
$$K_t(x,y) = \langle A_t f_{(t,y)}, g_{(t,x)} \rangle,$$

那么有

$$K(x,y) = \int_0^\infty K_t(x,y) \frac{dt}{t}.$$

对 K_t 应用 Journé 引理则得

$$|K_t(x,y)| \leqslant C_0 \int_{\mathbb{R}^n} (|f_{(t,y)}|^2 * \alpha_t)^{1/2} (|g_{(t,x)}|^2 * \beta_t)^{1/2} du.$$

由所作的假设得

$$(|f_{t,y}|^2 * \alpha_t)^{1/2}(u) \leqslant C_1\, p_t(u-y),$$

同样

$$(|g_{(t,x)}|^2 * \beta_t)^{1/2}(u) \leqslant C_1\, p_t(u-x).$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_t(u-y) p_t(u-x) du = (p_t * p_t)(x-y)$$
$$= p_{2t}(x-y) \leqslant 2p_t(x-y),$$

即可结束 K_t 的计算. 最后注意到

$$\int_0^\infty p_t(x-y) \frac{dt}{t} = \frac{C_n}{|x-y|^n}, \qquad \text{即证得(7.2).}$$

$\partial/\partial x_j K(x,y)$ 或 $\partial/\partial y_j K(x,y)$ 的计算是与上面相类似的，留给读者.

有了引理 6 之后，我们就能叙述算子 $L_m^{(2)}$ 的核 $L_m^{(2)}(x,y)$ 的正则性了. 以下沿用定理 3 的假设和记号.

命题 5 算子 $L_m^{(2)}$ 的核 $L_m^{(2)}(x,y)$ 满足估计

$$|L_m^{(2)}(x,y)| \leqslant C_0^m |x-y|^{-n}, \tag{7.6}$$

$$|\partial/\partial y_j L_m^{(2)}(x,y)| \leqslant C_0^m |x-y|^{-n-1}, 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{7.7}$$

并且若 $|x'-x| \leqslant \frac{1}{2}(x-y)$ 和 $\varepsilon \in]0,1[$，则有

$$|L_m^{(2)}(x',y) - L_m^{(2)}(x,y)| \leqslant C_0^m C_\varepsilon |x'-x|^\varepsilon |x-y|^{-n-\varepsilon}. \tag{7.8}$$

我们知道 $L_m^{(2)} = \int_0^\infty Q_t B_1 R_t \cdots B_{m-1} R_t B_m W_t \mu(t) \frac{dt}{t}$，其中 $R_t = \rho_t + \pi_t$，奇异部分 ρ_t 有一个小于或等于 t 的作用半径(这就允许应用 Journé 引理)而正则部分 π_t 是一个由函数 $w_t(x) = t^{-n} w(x/t)$ 定义的卷积算子，w 属于 Schwarz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 为证明的需要，我们将把算子 π_t 和 W_t 纳入一个更一般的类内，此类的元素记作 S_t. 一个算子称为 S_t，如果它由一个核 $S_t(x,y)$ 定义，而在下列意义下 $S_t(x,y)$ 的行为像 Poisson 核 $p_t(x-y) = \frac{c(n)t}{(t^2+|x-y|^2)^{(n+1)/2}}$，对某一常数 C 有

$$|S_t(x,y)| \leqslant C\, p_t(x-y) \text{ 和 } |\partial/\partial y_j S_t(x,y)| \leqslant C t^{-1} p_t(x-y). \tag{7.9}$$

作为开始，把出现在 $L_m^{(2)}$ 中的所有算子 R_t 换成 ρ_t. 令 $\Lambda_t = B_1 \rho_t B_2 \cdots B_{m-1} \rho_t B_m$，并研究 $\mathscr{T}_m = \int_0^\infty Q_t \Lambda_t W_t \frac{dt}{t}$，或更一般地，$\mathscr{T}_m = \int_0^\infty Q_t \Lambda_t S_t \frac{dt}{t}$.

Λ_t 的分布核 $\Lambda_t(u,v)$ 当 $|u-v| > (m-1)t$ 时是零，而 $\mathscr{T}_m$ 的分布核 $\mathscr{T}_m(x,y)$ 由下式给定

$$\mathscr{T}_m(x,y) = \iint \psi_t(x-u) \Lambda_t(u,v) S_t(v,y)\, du dv. \tag{7.10}$$

我们打算应用 Journé 引理以研究这个积分，为此，固定 $p \in]1, \frac{n}{n-1}[$，并以 c_0 表示 $\rho_t : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的范数，这个范数

不依赖于 t. 于是 $\Lambda_t: L^p \to L^p$ 的范数不超过 c_0^{m-1}, 而 Journé 引理给出

$$|\mathscr{T}_m(x,y)| \leqslant C\, c_0^{m-1}\int_{\mathbb{R}^n}(|\psi_t|^p * \alpha_r)^{1/p}(u-x) \times (|p_t|^q * \beta_r)^{1/q}(u-y)du, \tag{7.11}$$

其中　$r=(m-1)t$, 而 C 是出现在 $|S_t(x,y)| \leqslant C\, p_t(x-y)$ 中的常数, p_t 是 Poisson 核.

为估算当 $0<t<r$ 时 $|\psi_t|^p * \alpha_r$ 的值, 注意到下列事实是方便的, 即不计无关紧要的常数因子, $t^{n(p-1)}|\psi_t|^p$ 以尺度 t 构成集中在 0 的 Dirac 测度的一个逼近. 考虑到 α_r 和 Poisson 核的标准化, 当 $0<t\leqslant r$ 时, 则有

$$(t^{n(p-1)}|\psi_t|^p * \alpha_r)(u) \leqslant Cr^{n(p-1)}(p_r(u))^p. \tag{7.12}$$

由于 $r=(m-1)t$, 非常容易地得到

$$(|\psi_t|^p * \alpha_r)^{1/p} \leqslant Cm^{n/q}\, p_r \tag{7.13}$$

同样地

$$(|p_t|^q * \beta_r)^{1/q} \leqslant Cm^{n/p}\, p_r. \tag{7.14}$$

把这些估计引入到(7.11)的右端之后, 剩下的就是作估算: $\int p_r(u-x)p_r(y-u)du=(p_r * p_r)(x-y)=p_{2r}(x-y)\leqslant 2m\, p_t(x-y)$. 要结束计算只要注意到 $\int_0^\infty p_t(x-y)\dfrac{dt}{t}=\dfrac{n}{|x-y|^n}$, 这样就证明了(7.6).

出现在(7.6)左端的几何增长来自算子 $\rho_t: L^p \to L^p$ 的范数, 这个算子作用了 $m-1$ 次.

估计式(7.7)的证明是同样的. 仅有的不同是 $S_t(x,y)$ 换成了 $\dfrac{\partial}{\partial y_j}S_t(x,y)$, 后者的绝对值不超过 $Ct^{-1}p_t(x-y)$.

现在来讨论核 $\mathscr{T}_m(x,y)$ 关于 x 的正则性. 令 $d=|x'-x|$, $f_t(u)=\psi_t(x-u)-\psi_t(x'-u)$, 需要从上估计 $|I(x,x',y)|$, 这里

$$I(x,x',y)=\int_0^\infty\iint f_t(u)\Lambda_t(u,v)S_t(v,y)dudv\,\frac{dt}{t}.$$

把对 t 的积分分解为 $\int_0^{2d}\cdots\frac{dt}{t}+\int_{2d}^\infty\cdots\frac{dt}{t}=I_1+I_2$.

为估计 $|I_1|$,分别处理差 $f_t(u)$ 中的两项,由前面的计算即得 $C_0^m\int_0^{2d}p_t(x-y)\frac{dt}{t}+C_0^m\int_0^{2d}p_t(x'-y)\frac{dt}{t}\leqslant C'C_0^m\frac{d}{|x-y|^{n+1}}$(这是由于 $d=|x'-x|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$).

反之,若 $t\geqslant 2d$,为从上估计 $\iint f_t(u)\Lambda_t(u,v)S_t(v,y)dudv$,我们应用引理 6. 读者在作具体的计算后可知,若 $\varepsilon=n/p-(n-1)$,则有

$$(|f_t|^p*\alpha_r)^{1/p}(u)\leqslant C\left(\frac{d}{t}\right)^\varepsilon m^{n/q}p_r(u-x).\qquad(7.15)$$

这个估计代替(7.13),再结合(7.14),即给出(7.8).

最后指出如何从算子 $\mathcal{T}_m$ 的研究过渡到 $L_m^{(2)}$ 的研究. 我们意欲把 $L_m^{(2)}$ 分解成 m 个有 $\mathcal{T}_m$ 的结构的算子的和. 以下说明如何实施.

由于我们曾经给的引理 6 的第一个应用得知 $S_t=\pi_tB_l\rho_t\cdots\rho_tB_mW_t$ 的核 $S_t(x,y)$(若 $1\leqslant l\leqslant m$) 满足估计(7.9)

从一个"字" $Q_tB_1R_t\cdots B_{m-1}R_tB_mW_t$ 出发,应用下列程式把它拆开. 从右边开始,把最后一个 R_t 写成 $\rho_t+\pi_t$ 的形式. 这就产生两项,包含 π_t 的项就不再拆开. 而把包含 ρ_t 的项中的最后一个算子 R_t 写成形式 $R_t=\rho_t+\pi_t$ 等等 $\cdots$.

这个程式产生 m 项. 最后一项是 $Q_tB_1\rho_tB_2\cdots B_{m-1}\rho_tB_mW_t$,在对 t 积分以后就得到算子 $\mathcal{T}_m$. 其余的项有形式 $Q_tB_1R_t\cdots B_{l-1}S_t, l\leqslant m$. 这些项产生结构跟 $L_m^{(2)}$ 一样的算子,所不同的是 W_t 由 S_t 代替,而 m 由 $l-1<m$ 代替.

最后导致以 S_t 代替 W_t 从而扩大算子 $L_m^{(2)}$ 的族,并由对整数 m 的归纳推理以完成证明. 一个更细心的考察指出常数关于 m 是几

何增长的.

8. 算子 L_m 的核 $L_m(x,y)$ 的研究

以下述典型情形作为开始,考虑一个算子 $L=\int_0^\infty Q_t A_t \frac{dt}{t}$,它由具有下列性质的算子 Q_t 和 A_t 来定义.

Q_t 的核 $q_t(x,y)$ 满足 $|q_t(x,y)|\leqslant t^{-n}$,

若 $1\leqslant j\leqslant n$, $|\partial/\partial x_j q_t(x,y)|\leqslant t^{-n-1}$,若 $|x-y|>t$, $q_t(x,y)=0$.

至于算子 A_t,我们假定存在一个常数 C_0 使算子 $A_t: L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的范数不超过 C_0,并且当 $|x-y|>t$ 时, $A_t(x,y)=0$.

在这些条件之下, L 的分布核 $K(x,y)$ 满足

$$\int_{\{|x-y|\geqslant 2|x'-x|\}} |K(x',y)-K(x,y)|dy\leqslant C_1. \tag{8.1}$$

缘由如下.

令 $d=|x'-x|$,并用 E_j 表示由 $2^j d\leqslant|x-y|\leqslant 2^{j+1}d$ 定义的二进圆环. $Q_t A_t$ 的核 $K_t(x,y)$ 是

$$K_t(x,y)=\int q_t(x,u)A_t(u,y)du. \tag{8.2}$$

我们打算估计

$$\int_0^\infty \sum_{j\geqslant 1}\int_{E_j} |K_t(x',y)-K_t(x,y)|dy\frac{dt}{t} \tag{8.3}$$

的值,以便验证(8.1).

由于当 $|x-y|>2t$ 时 $K_t(x,y)=0$,遂有 $\int_{E_j}|K_t(x',y)-K_t(x,y)|dy=0$,除非 $t\geqslant 2^{j-1}d$. 在后一种情形,把 $\int_{E_j}|K_t(x',y)-K_t(x,y)|dy$ 上估为 $|E_j|^{1/2}\left(\int_{E_j}|K_t(x',y)-K_t(x,y)|^2 dy\right)^{1/2}$.

为了估算这后一个 L^2 范数,我们把问题线性化,为此考虑 $I_j=$

$\int \{K_t(x',y) - K_t(x,y)\} f_j(y) dy$，这里 f_j 由 E_j 支撑，并且满足 $\| f_j \|_2 \leqslant 1$.

今有 $I_j = \iint \Delta_t(u) A_t(u,y) f_j(y) dy du$，其中 $\Delta_t(u) = q_t(x',u) - q_t(x,u)$. 返回到算子则有 $I_j = \langle A_t f_j, \Delta_t \rangle$，并且可以利用 A_t 的 L^2 连续性. 遂有 $|I_j| \leqslant C_0 \| f_j \|_2 \| \Delta_t \|_2 \leqslant C d t^{-n/2-1}$. 于是(8.3)上估为 $d^{n/2+1} \sum_1^\infty 2^{nj/2} \int_{2^{j-1}d}^\infty t^{-\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} = C_1$.

这个典型情形业已处理停当，我们回到实际情形，算子和函数不再以几何上简单的集合作支集，而是在无穷远点有速降性，这就引进了误差项. 另外，用来定义 Q_t 的函数 ψ 在 0 点是奇异的，这就迫使利用 L^p 范数以代替 L^2 范数.

除此之外，证明的结构保持不变. 像在前节一样，首先考虑简化算子

$$\int_0^\infty Q_t B_1 \rho_t \cdots B_m \rho_t \mu(t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty Q_t A_t \frac{dt}{t}. \tag{8.4}$$

保留典型情形的记号，我们打算验证存在一个指数 $\varepsilon > 0$ 和一个常数 C_0 使

$$\int_{E_j} |R_m(x,y) - R_m(x',y)| dy \leqslant C_0^m 2^{-\varepsilon j}. \tag{8.5}$$

这个估计由

$$\left(\int_{E_j} |R_m(x,y) - R_m(x',y)|^p dy \right)^{1/p} \leqslant C_0^m (2^j d)^{-n/q} 2^{-\varepsilon j} \tag{8.6}$$

和 Hölder 不等式推出.

为证明(8.6)，仍旧考虑积分

$$I_j = \int_{E_j} (R_m(x,y) - R_m(x',y)) f_j(y) dy,$$

以便把问题线性化. 其中 f_j 被 E_j 支撑，并且满足 $\| f_j \|_q \leqslant 1$.

回到 R_m 的定义则得

$$I_j = \int_0^\infty \iint \{\psi_t(x-u) - \psi_t(x'-u)\}\Lambda_t(u,y)f_j(y)dudy\frac{dt}{t}.$$

像在典型情形一样，在关于 t 的积分中引进一个分点. 固定一个指数 $\gamma \in]\frac{n}{q},1[$，并用 I'_j 和 I''_j 表示把 $0<t<\infty$ 分别换成 $0<t<2^{\gamma j}d$ 和 $t \geqslant 2^{\gamma j}d$ 所得的两个积分.

为估计 I''_j，仅利用 $\rho_t: L^p \to L^p$ 的连续性得

$$|I''_j| \leqslant C_0^m \int_{d2^{\gamma j}}^\infty \| \psi_t(x-u) - \psi_t(x'-u) \|_p \frac{dt}{t}.$$

还是令 $\varepsilon = n(\frac{1}{p} - \frac{n-1}{n})$，具体的计算给出

$$\| \psi_t(x-u) - \psi_t(x'-u) \|_p \leqslant Cd^\varepsilon t^{-1}, \tag{8.7}$$

由此得 $|I''_j| \leqslant Cd^\varepsilon(2^{\gamma j}d)^{-1}$，而 $\sum_1^\infty (2^j d)^{n/q}|I_j''| \leqslant$

$$C\sum_1^\infty 2^{j(n/q-\gamma)} < \infty.$$

为估计 $|I'_j|$，我们不计较 $\psi_t(x-u)$ 和 $\psi_t(x'-u)$ 之间的差别. 而来考虑积分

$$A_j = \int_0^{d2^{\gamma j}} \iint \psi_t(x-u)\Lambda_t(u,y)f_j(y)dudy\frac{dt}{t}.$$

B_j(x 代以 x') 的情形有同一类型.

为估计关于(u,y) 的重积分再次利用 Journé 引理. 这导致

$$C_0^m \int_{\mathbb{R}^n} (|\psi_t|^p * \alpha_r)^{1/p}(u-x)(|f_j|^q * \beta_r)^{1/q}(u)du. \tag{8.8}$$

由于 $r=(m-1)t$，我们有$(|\psi_t|^p * \alpha_r)^{1/p}(u) \leqslant Cm^{n/q}p_r(u)$.

令 $g(u) = (|f_j|^q * \beta_r)^{1/q}$，并注意到由凸性得

$$\int p_r(u-x)g(u)du \leqslant (\int p_r(u-x)g^q(u)du)^{1/q},$$

从而

$$\left|\iint \psi_t(x-u)\Lambda_t(u,y)f_j(y)dudy\right| \tag{8.9}$$
$$\leqslant C_0^m C_m^{n/q}(p_r * \beta_r * |f_j|^q)^{1/q}(x).$$

再注意到 $p_r * \beta_r \leqslant C p_r \leqslant C_m\ p_t$，那么就剩下估计 $p_t * |f_\delta|^q(x)$ 了.

为此要考虑几何尺度的差别. 今有 $0 < t < 2^{\gamma j} d$，并且 $|f_j|^q$ 由 E_j 所支撑. 而以 t 给定的尺度为标准，E_j 远离 x，从而

$$(|f_j|^q * p_t)(x) = \int_{E_j} p_t(x-y)|f_j(y)|^q dy \leqslant C' t (2^j d)^{-n-1}.$$

再直接算出 $\int_0^{2^{\gamma j} d} t^{1/q} \frac{dt}{t} = C(d z^{\gamma j})^{1/q}$，从而只要 $\gamma < 1$，关于 j 的级数就收敛.

9. 补充和注释

在对巴黎的一次访问期间（1980—1981），A. McIntosh 曾提醒我们注意 Kato 问题的多重线性观点以及来自一维 Kato 问题的和来自 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 算子的两种多重线性算子之间的深刻联系. 当时（1980 年秋）两个问题都还没有解决.

McIntosh 向我们提出了一个处理 Colderon 的高阶交换子（由核 v. p. $\frac{(A(x)-A(y))^m}{(x-y)^{m+1}}$，$A' \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 定义）的新方法，这个方法显得比我们以往沿用的方法方便得多. 跟 R. Coifman 合作，我们得到了高阶交换子的 L^2 连续性，并给出了算子范数的上估值 $C\|A'\|_\infty^m (1+m)^4$，$A(x)$ 是实值的或复值的. 我们利用一个属于 McIntosh 的重新赋范技巧终于证明了对于所有 Lipschitz 曲线由 Cauchy 核定义的算子的 L^2 连续性（[65]）. 同一篇文章还包含了一维 Kato 猜测的完全证明.

今天我们对两个问题之间联系的了解更趋深入. 限于一维情形，令 $D = -i\frac{d}{dx}$. 用 A 和 B 表示由 $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ 和 $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ 定义的逐点乘法算子，这两个函数是复值的并满足下列增生条件：存在一个常数 $\delta > 0$ 使得 $\mathrm{Re}\, a(x) \geqslant \delta > 0$，$\mathrm{Re}\, b(x) \geqslant \delta$

> 0. 在这些条件之下，算子 $T = BDAD$ 满足条件(2.6)，并且利用命题 1 可以定义 $\sqrt{T}$. 跟 C. Kenig 合作([60])，我们证明了 $\sqrt{T} = J(A,B)D$，这里 $J(A,B)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 到其自身上的一个同构.

若 $A = B$，那么 $J(A,B)$ 是 Lipschitz 图象上的 Cauchy 算子，该图象的参数表示由 $1/a(t)(t \in \mathbb{R})$ 的原函数给定.

而若 $B = I$，$\sqrt{T}$ 是 Kato 算子.

因此，增生微分算子和 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 算子属于同一族. 从某种意义上说来，这一观点由本章我们沿用的推理步骤所证实，属于 J. L. Journé 的这个推理步骤把 Kato 算子跟一个奇异积分算子沟通起来.

我们指出在跟定理 2 同样的限制条件下，Kato 问题还有另外两种解法([62]和[105]).

第 15 章　Lipschitz 区域内的位势理论

1. 引　　言

Calderon 以探讨边界不规则的区域内的椭圆型偏微分方程为动机而实施其研究计划. Calderon 方法的本质在于用边界上的伪微分方程代替内部的偏微分方程. 但是如果边界仅仅是 Lipschitz 的,这个方程改变性质;其中出现的不再是伪微分算子,而是我们在第 9 章介绍过的新的算子.

当 Calderon 执行这个计划时,两个困难摆在面前. 首先,就连不得不使用的算子的存在性就成为问题. 假定有朝一日人们竭力构造了这些算子,进而就必须求解在边界上写出的方程. 为解这个方程,求一个算子的逆从而建立一个象征算法不失为恰当之举. 而象征算法的缺少在第 9 章曾令人棘手,并且正是 Calderon 计划的第二个困难所在.

我们要考察一个可以回溯到 Poincaré、Neumann 和 Hilbert 的历史问题,以此说明这些注释. 该问题涉及用双层位势方法解 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内的一个区域 Ω 内的 Dirichlet 以及 Neumann 问题.

当 Ω 是一个正则有界区域时,出现在 Calderon 方法中的算子是经典的伪微分算子;这也是奇异积分算子,其核正是由"双层位势"提供.

在经由 Calderon 方法化归以后,求解 Dirichlet 或 Neumann 问题就简化为一个求作用在边界上的形如 $\frac{1}{2}+K$ 的算子的逆的问题. 参照的函数空间将是 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$,这里 $d\sigma$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上

的曲面测度.

当 Ω 是一个(对某个 $\alpha>0$, $C^{1+\alpha}$ 类的) 正则有界开集时,算子 $K: L^2(\partial\Omega, d\sigma)\to L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ 是紧的并且 Fredholm 理论(正是为这个应用而被发现) 允许求 $\frac{1}{2}+K$ 的逆.

当 Ω 仅是 C^1 类的,主要的困难是证明在参照空间 $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ 上 K 的连续性. 这个连续性被证明之后(A. Calderon, 1977), Fabes, Jodeit 和 Riviere ([104])注意到算子 K 还是紧的,这就允许像在正则情形一样结束讨论. 不过 K 不再是经典的伪微分算子.

最后若 Ω 是一个 Lipschitz 有界开集, K 的连续性于 1981 年在[65]中被证明. 这由第9章的结果推导出来. 不过算子 K 不再是紧的. G. Verchota 克服了这个本质性困难. 他幸运地利用属于 Jerison 和 Kenig ([136]) 的能量不等式证明了 $\frac{1}{2}+K$ 是可逆的.

在细心地陈述由 Verchota 得到的结果之后,我们限于考察下列特殊情形,Ω 是位于一个 Lipschitz 图象上方的开集,并给出一个完整的证明.

为处理一般情形所进行的修改是相当精巧的,不过并不需要新的思想,有兴趣的读者可参阅 Verchota 的论文([232]).

2. 结果的陈述

以下一直设 $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个有界凸开集. 我们说 Ω 是一个 Lipschitz 开集,如果下述条件满足. 一方面,Ω 的边界 $\partial\Omega$ 仅包含有限个连通分支. 另一方面,对于所有 $x_0\in\partial\Omega$,可以找到一个标准正交坐标系 $\mathscr{R}(x_0)$, (x_0) 是其原点,还有两个正数 ε 和 η 和一个 Lipschitz 函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,使得当用 $\mathscr{C}=\mathscr{C}(\mathscr{R}(x_0),\varepsilon,\eta)$ 表示由 $\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant\varepsilon$ 和 $-\eta\leqslant x_{n+1}\leqslant\eta$ 定义的截圆柱时,有

$$\mathscr{C} \cap \Omega = \{x = (x', x_{n+1}); |x'| \leqslant \epsilon \text{ 并且 } \varphi(x') < x_{n+1} \leqslant \eta\} \tag{2.1}$$

以及

$$\mathscr{C} \cap \partial\Omega = \{x = (x', x_{n+1}); |x'| \leqslant \epsilon \text{ 并且 } x_{n+1} = \varphi(x')\}. \tag{2.2}$$

以上我们令 $x' = (x_1, \cdots, x_n)$, $|x'| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

由于 $\partial\Omega$ 是一个紧集,只需 N 个方才描述的类型的圆柱 $\mathscr{C}_1$, $\cdots$, $\mathscr{C}_N$ 就可得到由相应的开圆柱组成的 $\partial\Omega$ 的一个覆盖.

为处理在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的局部问题,只需在这些截圆柱之一的内部进行讨论. 于是固定一个标准正交系 $\mathscr{R}$,忘掉 ϵ 带来的限制,并假定 Ω 整个地由 $x_{n+1} > \varphi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ 定义,而 φ 整体地满足 Lipschitz 条件,即 $\|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant M$, M 是一个有限常数. 在这种情形,固定另一常数 $M' > M$,并在每一边界点 $x \in \partial\Omega$ 缚住一个非切向的内接锥 $\Gamma(x)$,它完全位于 Ω 的内部并由下式定义: $y_{n+1} - x_{n+1} \geqslant M'|y' - x'|$. 从几何的观点看,这个锥"存在的理由"是下述事实,存在一个常数 $\delta > 0$,使得 $y \in \Gamma(x)$ 到 $\partial\Omega$ 的距离不小于 $\delta|y - x|$. 当 y 留在 $\Gamma(x)$ 内趋近于 x 时,y"相对远离"边界上的其他的点.

在有界 Lipschitz 开集的情形,非切向内接锥变成截锥,记之为 $\Gamma(x)$, $x \in \partial\Omega$. 它们有一个一致的张角 $\alpha > 0$,一致的高度 $\tau > 0$,而从几何观点看,它们的"存在理由"跟无界的情形一样.

这些截锥的构造在[232]中被细致地描述,建议读者参考这一文献. 这个构造的细节在下文中不起任何作用.

今回到 Dirichlet 问题,即计算一个已知"边值"的 Ω 内的调和函数. 先回忆一下,所谓 u 在 Ω 内是调和的,如果 $\Delta u = 0$,这里 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$.

我们打算解 Dirichlet 问题,已知边界数据 $g(x)$ 属于 $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$,这里 $d\sigma$ 是边界上的表面积测度. 可以想象这个问题没有任何

意义，因为一方面 $g(x)$ 仅在 $\partial\Omega$ 上几乎处处有定义，另一方面为确定 Ω 内的调和函数 u，仅仅知道在边界 $\partial\Omega$ 上的几乎所有点的非切向极限是不够的. 这个困难在正则情形同样出现. 请看反例. 设 $\Omega = \{(x',x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} > 0\}$. 令 $u(x) = u(x',x_{n+1}) = x_{n+1}(|x'|^2 + x_{n+1}^2)^{-\frac{n+1}{2}}$. 那么 u 在 Ω 内调和，并且除 $x' = 0$ 外，处处有 $u(x',0) = 0$.

为排除 Dirichlet 问题的这种病态解，只需引进一个安全类，它类似于在 Lebesgue 控制收敛定理中出现的函数类. 这个类由 Ω 内这样的调和函数 u 组成，其相应于非切向逼近的极大函数 $u^*(x)$ 属于 $L^2(\Omega,d\sigma)$.

也就是说如下定义 $\mathscr{H}^2(\Omega)$

定义 1 设 u 是 Ω 内的一个调和函数. 我们说 $u \in \mathscr{H}^2(\Omega)$，如果 $u^*(x) \in L^2(\partial\Omega;d\sigma)$，其中

$$u^*(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} |u(y)|. \tag{2.3}$$

空间 $\mathscr{H}^2(\Omega)$ 不依赖于选来定义非切向逼近的截锥.

现在来描述迹算子 $\theta: \mathscr{H}^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega;d\sigma)$. 当调和函数 u 连续延拓到边界时，显然 θ 可定义为 $u \in \mathscr{H}^2(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上的通常限制. 在一般情形，若在 $x \in \partial\Omega$，当 $y \in \Gamma(x), y \to x$ 时 $\lim u(y)$ 存在，我们就说 u 在 $x \in \partial\Omega$ 具有非切向极限. 若 u 属于 $\mathscr{H}^2(\Omega)$，那么当 $\partial\Omega$ 赋予表面积测度 $d\sigma$ 时，对几乎所有的 $x \in \partial\Omega$，$u(y)$ 具有一个非切向极限，记之为 $u(x)$. 这样定义的函数属于 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$，并且另一些非切向截锥的选取，在几乎所有的 $x \in \partial\Omega$，引导出同一个迹.

事实上，迹算子 $\theta: \mathscr{H}^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 是这两个空间之间的一个同构. 属于 B. Dahlberg 的这个定理建立在 $\partial\Omega$ 上的调和测度和表面积测度等价的基础之上([81] 和[82]).

Dahlerg 定理理论上解决了下列 Dirichlet 问题：对一个给定在 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 中的函数 g，找一个 $u \in \mathscr{H}^2(\Omega)$，使得 $\theta(u) = g$.

我们打算经由另一途径处理这同一 Dirichlet 问题，并且提供一个求解算法.

为了提出 Neumann 问题，引进空间 $\mathscr{H}_1^2(\Omega)$，它由这样的 Ω 内的调和函数 u 组成，u 使得 $v(x) = \sup\limits_{y\in\Gamma(x)} |\nabla u(g)|$ 属于 $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$. 那么当 $y \in \Gamma(x)$，y 趋向于 x 时梯度 $\nabla u(y)$ 的非切向极限对几乎所有的 $x \in \partial\Omega$（赋予测度 $d\sigma$）存在.

求解 Neumann 问题意味着，对给定在 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 中的 g，找一个函数 $u \in \mathscr{H}_1^2(\Omega)$，在 $\partial\Omega$（赋予测度 $d\sigma$）上几乎处处满足 $\frac{\partial u}{\partial n} = g$. 这里对 $x \in \partial\Omega$，$n(x)$ 表示 $\partial\Omega$ 在 x 的法向量，对几乎所有的 $x \in \partial\Omega$ 它存在，并且令

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \lim_{y\in\Gamma(x),\, y\to x} \nabla u(y)\cdot n(x). \tag{2.4}$$

为陈述本章主要结果，现在必须引进双层位势. 它以下列方式构造. 从 Laplace 算子 Δ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内的基本解 $-\frac{1}{(n-1)w_n}|x|^{-n+1}$ 出发；ω_n 是单位球 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的表面积. 这个基本解允许计算由电荷分布产生的电位势. 一个双层分布是一个由 $\partial\Omega$ 支撑的分布 S，它由

$$\langle S,g\rangle = -\int_{\partial\Omega} f(y)\frac{\partial g}{\partial n}(y)d\sigma(y)$$

对检验函数 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ 定义. 其中 $f(y) \in L^1(\partial\Omega,d\sigma)$ 是一个给定的密度.

$\partial\Omega$ 上密度为 f 的双层分布在 $x \in \Omega$ 产生的位势是

$$\mathscr{K} f(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} \frac{(y-x)\cdot n(y)}{|y-x|^{n+1}} f(y)d\sigma(y). \tag{2.5}$$

若 u 和 v 是在一个正则有界开集 Ω 内调和的两个函数，并设 u 和 v 在 $\bar{\Omega}$ 的邻域内是 C^1 类的，Green 公式（在第 5 节我们将验证应用它的合理性）告诉我们

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0.$$

对于 $v(y)=-\dfrac{1}{(n-1)w_n}|x-y|^{-n+1}$ 和挖去一个中心在 x 半径为 ε 的球的 Ω 应用这个注释(在令 ε 趋向于 0 过渡到极限之后)得到

$$u(x)=\mathscr{K}u(x)+\frac{1}{(n-1)w_n}\int_{\partial\Omega}|x-y|^{-n+1}\frac{\partial u}{\partial n}(y)d\sigma(y). \tag{2.6}$$

这个等式表明 $\mathscr{K}u(x)$ 是 u 的一个合理逼近,例如若令 $u(x)$ 等于 1,则得 $\mathscr{K}(1)=1$.

由构造可知当 f 属于 $L^1(\partial\Omega,d\sigma)$ 时,$\mathscr{K}f(x)$ 是 Ω 内的一个调和函数. 此后我们将限于 f 属于 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 的情形,后面将验证这种选取的合理性. 当 f 属于 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 时,$\mathscr{K}f(x)$ 属于 $\mathscr{H}^2(\Omega)$ 这件事丝毫不是显然的. 正是为了证明这一结果, A. Calderon 才筹划了由广义奇异积分所定义的算子的深入研究.

算子 $\mathscr{K}$ 的性质由下列定理描述.

定理 1 设 Ω 是一个 Lipschitz 区域. 那么由双层位势定义的算子 $\mathscr{K}$ 从 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 到 $\mathscr{H}^2(\Omega)$ 内是连续的. 另外,对所有函数 $f\in L^2(\partial\Omega,d\sigma)$,对几乎所有的 $x\in\partial\Omega$(赋予测度 $d\sigma$)有

$$\lim_{y\in\Gamma(x),y\to x}\mathscr{K}f(y)=\left(\frac{1}{2}+K\right)f(x), \tag{2.7}$$

其中

$$Kf(x)=\frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\{|y-x|\geq\varepsilon\}}(y-x)\cdot n(y)|y-x|^{-n-1}f(y)d\sigma(y). \tag{2.8}$$

算子 K 因而在 $L^2(\partial\Omega;d\sigma)$ 上连续,并且它由一个完全在 $\partial\Omega$ 上计算的奇异积分定义. 这个奇异积分对几乎所有的 $x\in\partial\Omega$(总是赋予表面积测度 $d\sigma$) 存在.

Dirichlet 问题的解则由下列定理提供.

定理 2 仍假设 Ω 是一个 Lipschitz 区域. 那么"边界"算子

$$\frac{1}{2}+K: L^2(\partial\Omega;d\sigma)\to L^2(\partial\Omega;d\sigma)$$

是一个同构. 若 g 属于 $L^2(\partial\Omega;d\sigma)$, 调和函数 $u=\mathscr{K}\left(\frac{1}{2}+K\right)^{-1}g$ 是下列 Dirichlet 问题的唯一解:

$$\Delta u=0 \quad 在\ \Omega\ 内, u^* \in L^2(\partial\Omega,d\sigma), \tag{2.9}$$

并且

$$g(x)=\lim_{y\in\Gamma(x),y\to x}u(y)\ 对\ d\sigma\text{-}\ 几乎所有\ x. \tag{2.10}$$

为处理 Neumann 问题, 设 $K^*: L^2(\partial\Omega,d\sigma)\to L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 是算子 K 的伴随算子. 把满足 $\left(\frac{1}{2}-K^*\right)f_0=0$ 和 $\int_{\partial\Omega}f_0\,d\sigma=1$ 的 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 的唯一函数记作 f_0. 用 $L_0^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 表示 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 的由积分为零的函数组成的子空间.

单层位势算子 $S: L^2(\partial\Omega,d\sigma)\to\mathscr{H}^2(\Omega)$ 由下式定义

$$Sf(x)=-\frac{1}{(n-1)w_n}\int_{\partial\Omega}|x-y|^{-n+1}f(y)d\sigma(y). \tag{2.11}$$

沿用这些记号, 我们有

定理 3 设 Ω 是一个 Lipschitz 区域. 那么对所有函数 $f\in L^2(\partial\Omega,d\sigma)$, $u=S(f)$ 属于 $\mathscr{H}_1^2(\Omega)$.

另外, 算子 $\frac{1}{2}-K^*: L_0^2(\partial\Omega,d\sigma)\to L_0^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 是一个同构.

最后, 对于所有函数 $g\in L_0^2(\partial\Omega,d\sigma)$, $u=-S\left(\frac{1}{2}-K^*\right)^{-1}g$ 是下列 Neumann 问题的唯一解

$$\Delta u=0 \quad 在\ \Omega\ 内并且 (\nabla u)^*\in L^2(\partial\Omega,d\sigma), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=g\ 在\ \partial\Omega\ 上\ d\sigma\text{-}\ 几乎处处, 并且 \int uf_0\,d\sigma=0. \tag{2.13}$$

几个解释是必要的.

我们已经知道 $\mathscr{K}(1)=1$. 由此推知,对所有函数 $f\in L^2(\partial\Omega, d\sigma)$, $h=\left(\frac{1}{2}-K^*\right)f$ 积分必然为零. 虽然 $\left(\frac{1}{2}-K^*\right)$ 不是 $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 到自身上的一个同构,但幸好它是 $L_0^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 到自身上的一个同构.

在(2.13) 中, $\frac{\partial u}{\partial n}=g\quad d\sigma$- 几乎处处显然意味着对几乎所有的 $x\in\partial\Omega$,当 $y\in\Gamma(x)$, y 趋向于 x 时, $g(x)$ 是 $\nabla u(y)\cdot n(x)$ 的非切向极限.

再者,条件 $\int_v uf_0d\sigma=0$ 来源于 $u=S(h)$ 和 $\int hd\sigma=0$. 事实上, $S(f_0)$ 是一个常数,而由于 $S:L^2(\partial\Omega,d\sigma)\to L^2(\partial\Omega,d\sigma)$ 是自伴的,显然有 $\int_{\partial\Omega}uf_0d\sigma=\int_{\partial\Omega}S(h)f_0d\sigma=\int_{\partial\Omega}hS(f_0)d\sigma=c\int_{\partial\Omega}hd\sigma=0$.

最后,若 u 和 v 属于 $\mathscr{H}_1^2(\Omega)$,由 Green 公式得 $\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0$. 在 Lipschitz 边界情形,这里需要一个极限过渡,后面要详述. 取 $v=1$,则知对 $u\in\mathscr{H}_1^2(\Omega)$ 有 $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$. 为了 Neumann 问题有一个解,条件 $g\in L_0^2(\partial\Omega;d\sigma)$ 显然是必要的.

3. 双层位势的几乎处处存在性

我们决定置于下列情况之下, Ω 整体地由 $t>\varphi(x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ 定义, φ 在整个 $\mathbb{R}^n$ 上是 Lipschitz 的,它取实值并且满足 $\|\nabla\varphi\|_\infty\leqslant M<\infty$. 为多少简化一点儿记号,用 V 表示 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的图象. 最后,我们把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的点记作 $X=(x,t)$ 或 $Y=(y,s)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$.

将在这个框架中证明定理 1,2 和 3. 这时定理 3 中应该用

$L^2(V,d\sigma)$ 代替 $L_0^2(V,d\sigma)$（因为函数 1 不是平方可积的）. 函数在 $L_0^2(V,d\sigma)$ 中也不存在.

适应有界情形的必要修改是很巧妙的，但仅是技术性的，因此建议有兴趣的读者参考[232].

第一个注释是有关双层位势的写法的. 若 $x\in V, y\in V$，则

$$\frac{(Y-X)\cdot N(Y)}{|Y-X|^{n+1}}d\sigma(Y)=K(\varphi;x,y)dy, \tag{3.1}$$

其中

$$K(\varphi;x,y)=\frac{1}{\omega_n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)-(x-y)\cdot\nabla\varphi(y)}{(|x-y|^2+(\varphi(x)-\varphi(y))^2)^{(n+1)/2}}. \tag{3.2}$$

我们用 $N(Y)$ 表示 V 在 Y 的指向 Ω 的外部的即指向下方的单位法向量.

采用这些记号，定理 1 的类似结果陈述如下.

定理 4 对所有函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n,dx)$，极限

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\epsilon}K(\varphi;x,y)f(y)dy=T_\varphi(f)(x) \tag{3.3}$$

几乎处处存在，并且如此定义的算子 T_φ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

这个算子 T_φ 将称为双层位势的奇异部分.

我们知道（第 7 章）为证明这一结果，只需确立当 f 属于 Schwarz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 时极限的存在性，并且证明存在一个常数 C，使得若令

$$T_\varphi^*(f)(x)=\sup_{\epsilon>0}\left|\int_{|x-y|\geqslant\epsilon}K(\varphi;x,y)f(y)dy\right| \tag{3.4}$$

则有

$$\|T_\varphi^*(f)\|_2\leqslant C\|f\|_2. \tag{3.5}$$

从确立当 f 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 时极限(3.3) 的存在性开始. 为此利用下列引理.

引理 1 一个 Lipschitz 函数 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是几乎处处可微的：对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\lim_{|y|\to 0}|y|^{-1}(F(x+y)-F(x)-y\cdot\nabla F(x))=0.$$

在本章附录里，我们将回忆这个经典结果的证明.

第二个引理允许我们对 $K(\varphi;x,y)$ 进行分部积分并以此消除其奇异性. 用 $\lambda(t)$，$-\infty<t<\infty$，表示函数 $(1+t^2)^{-(n+1)/2}$ 的奇原函数，我们有

引理 2 在 φ 的所有可微点 $x\in\mathbb{R}^n$，若 f 是 Scbwarz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的一个函数，则有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(\varphi;x,y)f(y)dy \tag{3.6}$$
$$=-\int\frac{(x-y)\cdot\nabla f(y)}{|x-y|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|}\right)dy.$$

(3.6)的右端是一个绝对收敛积分.

为证明(3.6)，固定 x 并对

$$\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\operatorname{div}\left(\frac{x-y}{|x-y|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|}\right)f(y)\right)dy$$

应用 Green 公式. 散度是对变量 y 计算的，并且事实上有

$$\operatorname{div}\left(\frac{x-y}{|x-y|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|}\right)\right)=K(\varphi;x,y).$$

(3.6)的证明要点在于这里 Green 公式中出现的曲面积分随 ε 趋向于 0. 事实上，这个曲面积分不计符号是

$$I(\varepsilon)=\int_{S^{n-1}}f(x+\varepsilon\nu)\lambda\left(\frac{\varphi(x+\varepsilon\nu)-\varphi(x)}{\varepsilon}\right)d\sigma(\nu).$$

其中 $d\sigma(\nu)$ 是单位球 S^{n-1} 上的面积测度.

由于 φ 在 x 可微，应和控制收敛定理得 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}I(\varepsilon)=$

$f(x)\int_{S^{n-1}}\lambda(\nu\cdot\nabla\varphi(x))d\sigma(\nu)$. 为得结论，只需注意 λ 是奇函数. 把对蹠点两两组合即得$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}I(\varepsilon)=0$.

关于极大算子 T_φ^* 的估计(3.5)来自 Calderon-Zygmund 算子的一般理论. 不过由于核不具有第 7 章的假设中要求的关于 y 的正则性，我们还应作若干推演.

作为开始，把核 $K(\varphi;x,y)$ 分解为 $K_0(x,y)+\sum_1^n K_j(x,y)\partial\varphi(y)/\partial y_j$，其中

$$K_0(x,y)=\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{(|x-y|^2+(\varphi(x)-\varphi(y))^2)^{(n+1)/2}},$$

而

$$K_j(x,y)=\frac{x_j-y_j}{(|x-y|^2+(\varphi(x)-\varphi(y))^2)^{(n+1)/2}}.$$

由于算子作用在函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 上，我们可以把属于 L^∞ 的因子归并到 f 里，这就把问题化归到由奇异核 v.p. K_0 和 v.p K_j 定义的算子 T_0 和 T_j.

这样就宜于利用前几章的结果. 一方面，第 9 章定理 11 提供作为基础的 L^2 估计. 从而我们的算子 $T_j,0\leqslant j\leqslant n$，是 Calderon-Zygmund 算子. 另一方面，第 7 章的理论提供相应极大算子的连续性.

为使定理 4 提供定理 1 中所陈述的结果，宜比较由主值定义的极限和由非切向逼近提供的极限.

为此利用下列注释.

引理 3　采用前述记号，若 $t\neq\varphi(x)$，则有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t-\varphi(y)-(x-y)\cdot\nabla\varphi(y)}{(|y-x|^2+(\varphi(y)-t)^2)^{(n+1)/2}}f(y)dy=\frac{\omega_n}{2}\tag{3.7}$$

$$\times\ \mathrm{sign}\ (t-\varphi(x))f(x)-\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(y-x)\cdot\nabla f(y)}{|y-x|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(y)-t}{|y-x|}\right)dy.$$

为证明这一结果，重新进行引理 2 中的计算. 即从下列等式出发

$$\operatorname{div}\left(\frac{x-y}{|x-y|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(y)-t}{|y-x|}\right)\right)$$
$$=\frac{\varphi(y)-t-(y-x)\cdot\nabla\varphi(y)}{(|y-x|^2+(\varphi(y)-t)^2)^{(n+1)/2}}.$$

再据此组合引理中的两个积分便得

$$I(\varepsilon)=\int_{\{|y-x|\geqslant\varepsilon\}}\operatorname{div}\left(\frac{x-y}{|x-y|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(y)-t}{|y-x|}\right)f(y)\right)dy$$

根据 Green 公式，它变为

$$I(\varepsilon)=\varepsilon^{-n+1}\int_{\{|y-x|=\varepsilon\}}f(y)\lambda\left(\frac{\varphi(y)-t}{|y-x|}\right)d\sigma(y). \qquad (3.8)$$

仍用控制收敛定理计算 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}I(\varepsilon)$. 预先把两面积分化到单位球 S^{n-1} 上比较方便. 注意到 $\lambda(\pm\infty)=\pm\int_0^\infty(1+t^2)^{-(n+1)/2}dt$，以及 $\omega_{n-1}\int_0^\infty(1+t^2)^{-(n+1)/2}dt=\frac{1}{2}\omega_n$，即得 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}I(\varepsilon)=\frac{1}{2}\omega_n\operatorname{sign}(\varphi(x)-t)$.

我们回到定理 1. 我们打算首先利用由(3.3)给出的算子 K 的定义并证明(2.7). 然后指出为什么算子 K 也可由(2.8)计算. 应该注意到，在(2.8)中，根据我们的新记号，$|y-x|\geqslant\varepsilon$ 应换成 $|y-x|^2+(\varphi(y)-\varphi(x))^2\geqslant\varepsilon^2$.

为确立(2.7)，我们沿用习惯的格式. 当 f 属于 Schwarz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 时验证这个等式，再对相应极大算子证明一个估计.

非切向内接锥借助一个参数 $\alpha>M\geqslant\|\nabla\varphi\|_\infty$ 由 $\Gamma(x_0)=\{(x,t);t-\varphi(x_0)\geqslant\alpha|x-x_0|\}$ 定义.

用 $F(x,t)$ 表示(3.7)的左端. 我们有 $F(x,t)=-\omega_n\mathscr{K}f(x,t)$. 今来计算当 $(x,t)\in\Gamma(x_0)$，(x,t) 趋向于 $(x_0,\varphi(x_0))$ 时 $F(x,t)$ 的极限.

在(3.7)右端的积分中作变量替换 $y-x=u-x_0$，它便写成

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u-x_0)\cdot\nabla f(u+x-x_0)}{|u-x_0|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(u+x-x_0)-t}{|u-x_0|}\right)du. \tag{3.9}$$

由于 f 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，并且可限制 $|x-x_0|\leqslant 1$，可用 Lebesgue 控制收敛定理计算当 x 趋向于 x_0，t 趋向于 t_0 时(3.9)的极限. 我们得到极限 $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u-x_0)\cdot\nabla f(u)}{|u-x_0|^n}\lambda\left(\frac{\varphi(u)-t_0}{|u-x_0|}\right)du$. 这里非切向逼近不起任何作用.

反之，源于非切向逼近的几何事实在极大估计的证明中是本质的.

令 $F_*(x_0)=\sup\limits_{(x,t)\in\Gamma(x_0)}|F(x,t)|$，今证存在一个常数 C，使对所有函数 $f\in L^2(V,d\sigma)$ 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|F_*(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqslant C\|f\|_2. \tag{3.10}$$

定义截断核 $K_\varepsilon(\varphi;x,y)$ 如下：当 $|x-y|\geqslant\varepsilon$ 时，$K_\varepsilon(\varphi;x,y)=K(\varphi;x,y)$，否则，$K_\varepsilon(\varphi;x,y)=0$. 若 $\varepsilon=t-\varphi(x_0)$ 并且 $(x,t)\in\Gamma(x_0)$ 则有

$$\frac{t-\varphi(y)-(x-y)\cdot\nabla\varphi(y)}{(|x-y|^2+(t-\varphi(y))^2)^{(n+1)/2}}=K_\varepsilon(\varphi;x_0,y)+R_\varepsilon(x_0;x,y) \tag{3.11}$$

对某一常数 $C=C(M,\alpha)$ 有，当 $|x_0-y|\leqslant\varepsilon$ 时 $|R_\varepsilon(x_0;x,y)|\leqslant C\varepsilon^{-n}$，而当 $|x_0-y|\geqslant\varepsilon$ 时 $|R_\varepsilon(x_0;x,y)|\leqslant C\varepsilon|x_0-y|^{-n-1}$.

考虑到 $t-\varphi(x_0)\geqslant\alpha|x-x_0|$ 和 $|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\leqslant M|y-x_0|$，$0\leqslant M<\alpha$，(3.11)的证明是一个简单的几何练习.

此外，

$$\varepsilon\int_{\{|x_0-y|\geqslant\varepsilon\}}|x_0-y|^{-n-1}|f(y)|dy\leqslant C_nf^*(x_0),$$

这里 $f^*(x_0)$ 是 f 的 Hardy 和 Littlewood 的极大函数. 遂有

$$F_*(x)\leqslant K_*f(x)+Cf^*(x). \tag{3.12}$$

其中 $K_* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |\int K_\epsilon(\varphi; x, y) f(y) dy|$.

不等式(3.12) 跟第 7 章的结果一致. 为得结论. 把由核 $K(\varphi; x, y)$ 定义的算子分解为 $n+1$ 个 Calderon-Zygmund 算子,其前置有由 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的函数定义的 n 个乘法算子. 由此得当 $f \in L^2$ 时, $K_* f$ 属于 L^2(第 7 章定理 4). 最后,当 f 属于 L^2 时相应于双层位势的非切向最大函数 F_* 同样属于 L^2.

为结束定理 1 的证明,今考察由(2.8) 定义的主值算子和由(3.3) 给定的主值算子差别何在. 为此,令 $X = (x, \varphi(x))$, $Y = (y, \varphi(y))$,在(2.8) 中以 $N(Y)$ 代替 $n(y)$,考虑差

$$\Delta_\epsilon f(x) = \int_{|X-Y|\geq\epsilon} \frac{(Y-X)\cdot N(Y)}{|Y-X|^{n+1}} f(y) d\sigma(Y)$$

$$- \int_{|x-y|\geq\epsilon} K(\varphi; x, y) f(y) dy$$

$$= \int_{R(\epsilon)} \frac{(Y-X)\cdot N(Y)}{|Y-X|^{n+1}} f(y) d\sigma(Y),$$

其中 $R(\epsilon)$ 由 $|x-y| \leqslant \epsilon$ 以及 $(|x-y|^2 + (\varphi(x)-\varphi(y))^2)^{1/2} > \epsilon$ 定义. 特别地,当 y 属于 $R(\epsilon)$ 时, $|x-y| \geqslant (1+M^2)^{-1/2}\epsilon$,而且 $|(Y-X)\cdot N(Y)||Y-X|^{-n-1} \leqslant C\epsilon^{-n}$. $R(\epsilon)$ 的体积正好是 $c\epsilon^n$,由此推知 $|\Delta_\epsilon f(x)| \leqslant Cf^*(x)$,这里 $f^*(x)$ 是 f 的 Hardy 和 Littlewood 极大函数. 为证明当 f 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 时,几乎处处有 $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \Delta_\epsilon f(x) = 0$,只需对属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的 f 进行这个验证. 最终归结为证明

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{R(\epsilon)} \frac{(Y-X)\cdot N(Y)}{|Y-X|^{n+1}} d\sigma(Y) = 0.$$

作为开始我们注意函数 $N(Y) = N(y, \varphi(y))$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 从而几乎所有的点 $x \in \mathbb{R}^n$ 是这个函数的 Lebesgue 点. 即 $\epsilon^{-n}\int_{|x-y|\leqslant\epsilon} |N(Y) - N(X)| dy$ 随 ϵ 趋向于 0. 由于在"环"$R(\epsilon)$ 上 $\epsilon \leqslant |Y-X| \leqslant (1+M^2)^{1/2}\epsilon$ 上,对 $N(Y)$ 的所有 Lebesgue 点,可用 $N(X)$ 代替 $N(Y)$. 再注意在 φ 的所有可微点 x,

$\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0}\int_{R(\epsilon)}\frac{Y-X}{|Y-X|^{n+1}}d\sigma(Y)=0$. 这是由于 $Y|Y|^{-n-1}$ 是奇函数，并且若 φ 在 x 可微，积分区域 $R(\epsilon)$ 本质上关于 X 是对称的（在 $R(\epsilon)$ 和其对称集之间的对称差的体积是 $o(\epsilon^n)$）. 这个计算的细节是简单的并留给读者.

定理 1 证明完毕.

在证明定理 2 之前，我们先对单层位势的梯度确立定理 1 的类似定理. 所用方法跟本节的相同.

4. 单层位势及其梯度

沿用前节记号，即$\mathbb{R}^{n+1}$的点记作 $X=(x,t)$，$x\in\mathbb{R}^n$，$t\in\mathbb{R}$，而 $V\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的图象，φ 是整体 Lipschitz 的，即满足 $\|\nabla\varphi\|_\infty\leqslant M<\infty$. 最后 $d\sigma$ 是 V 上的面积测度.

若 $n\geqslant 3$，由 $f\in L^2(V,d\sigma)$ 产生的单层位势在$\mathbb{R}^{n+1}\backslash V$ 中由下式定义

$$Sf(x)=-\frac{1}{(n-1)\omega_n}\int_V|X-Y|^{-n+1}f(Y)d\sigma(Y). \quad (4.1)$$

这可简单地看成作为 Laplace 的基本解的函数 $-\dfrac{1}{(n-1)\omega_n}\cdot|x|^{-n+1}$ 和表面积测度 $fd\sigma$ 的卷积，$fd\sigma$ 是问题中的单层位势分布.

在 3 维 $(n=2)$ 情形，当 f 是 $L^2(V,d\sigma)$ 的任一函数时，这个积分在无穷远可能发散. 为使它收敛，只需固定一个不属于 V 的点 X_0 并系统地把核 $|X-Y|^{-n+1}$ 换成 $|X-Y|^{-n+1}-|X_0-Y|^{-n+1}$. 事实上，我们关心的只是 Sf 的导数，因而 X_0 的选取无关紧要.

若 $X=(x,t)$ 不属于 V，Sf 在 X 的梯度可由在积分号下求导来计算，并得到

$$\nabla Sf(X) = \frac{1}{\omega_n}\int_V \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} f(y)d\sigma(y). \tag{4.2}$$

当 X 趋近于 V 时将会发生什么?在下一定理中,我们不再突出 V 上方的开集 Ω. 对所有 $(x_0,\varphi(x_0))\in V$,用 $\Gamma_\pm(x_0)$ 表示分别由 $t-\varphi(x_0)>\alpha|x-x_0|$ ($\alpha>M$ 固定) 和 $t-\varphi(x_0)<-\alpha|x-x_0|$ 定义的两个锥. 我们致力于确定当 X 分别属于 $\Gamma_+(x_0)$ 或 $\Gamma_-(x_0)$ 时而趋向于 $X_0=(x_0,\varphi(x_0))$ 时 $\nabla Sf(X)$ 的极限.

定理 5 设 f 属于 $L^2(V,d\sigma)$,那么当 $X\in\Gamma_\pm(x_0)$ 并且趋向于 $X_0=(x_0,\varphi(x_0))$ 时 $\nabla Sf(x)$ 有一个极限. 这个极限由下式给定

$$\mp\frac{1}{2}f(X_0)N(X_0)+\frac{1}{\omega_n}\text{ v. p. }\int_V \frac{X_0-Y}{|X_0-Y|^{n+1}} f(Y)d\sigma(Y). \tag{4.3}$$

其中 $N(X_0)$ 是 V 在 X_0 的指向下方的单位法向量. 最后极大算子 $\sup\limits_{Y\in\Gamma_\pm(x)}|\nabla Sf(X)|$ 在 $L^2(V,d\sigma)$ 上有界.

正如前节一样,我们把定理 5 的证明分成两部分. 首先确立当 f 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个适当稠密向量子空间 E 时,非切向极限和主值的存在性. 为从特殊函数 $f\in E$ 过渡到一般函数,进而宜对相应于问题的极大算子证明一个 L^2 估计. 但是这第二步和前节我们发展的第二步是一样的. 因此我们要集中注意力到第一个验证,并定义 E.

一切跟前节一样,问题在于进行分部积分以消除核 $(X-Y)|X-Y|^{-n-1}$ 的奇异性. 不过首先对这个核进行若干变换较为相宜. 且看如何变换.

令 $\omega(x)=(1+|\nabla\varphi(x)|^2)^{1/2}$,并考虑如下定义的在 $X=(x,\varphi(x))\in V$ 的切向量

$T_1(X)=(\omega(x),0,0,\cdots,0,\omega(x)\partial\varphi/\partial x_1)$

$T_2(X)=(0,\omega(x),0,\cdots,0,\omega(x)\partial\varphi/\partial x_2)$

…

$T_n(X) = (0, 0, 0, \cdots, \omega(x), \omega(x)\partial\varphi/\partial x_n)$

以及由

$$N(X) = \left(\omega(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \omega(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, -\omega(x)\right)$$

定义的单位法向量. 这些向量的长度在 $(1+M^2)^{-1/2}$ 和 1 之间，并且行列式 $\det(T_1, \cdots, T_n, N)$ 取值 $(-1)^{n+1}(\omega(x))^{n-1}$. 这个行列式的模超过 $(1+M^2)^{-(n-1)/2}$，因此 $(T_1, \cdots, T_n, N)$ 的逆矩阵属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

用 $(T_1^*, \cdots, T_n^*, N)$ 表示 $(T_1, \cdots, T_n, N)$ 的对偶基. 那么所有的向量 $Z \in \mathbb{R}^{n+1}$ 可表示成

$$Z = (Z \cdot T_1)T_1^* + \cdots + (Z \cdot T_n)T_n^* + (Z \cdot N)N. \quad (4.4)$$

向量 $T_1^*, \cdots, T_n^*$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 把 (4.4) 用于 $Z = \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}}$，并令 $\widetilde{K}(X,Y) = \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} \cdot N(Y)$ 和 $K_j(X,Y) = \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} \cdot T_j(Y)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$，便得到值得注意的分解

$$\frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} = \sum_1^n K_j(X,Y)T_j^*(Y) + \widetilde{K}(X,Y)N(Y). \quad (4.5)$$

由 $T_j^*(Y)$ 或 $N(Y)$ 定义的逐点乘法算子在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是没有妨碍的，这是由于有关的向量属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

我们要解决的收敛性问题这就归结为有关核 $K_j(X,Y)$ 或 $\widetilde{K}(X,Y)$ 的相应问题. 但这些核具有比原来的核更简单的结构，事实上我们有

$$\omega_n K_j(X,Y)d\sigma(Y) = \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}(|X-Y|^{-n+1})dy$$

以及

$$\omega_n \widetilde{K}(X,Y)d\sigma(Y) = \frac{t-\varphi(y)-(x-y)\cdot\nabla\varphi(y)}{(|x-y|^2+(t-\varphi(y))^2)^{(n+1)/2}}dy.$$

$\int_V \widetilde{K}(X,Y)f(Y)d\sigma(Y)$ 的非切向收敛问题可由定理 1 解决. 剩下的是处理$\int K_j(X,Y)f(Y)d\sigma(Y)$. 由于 X 不属于 V, 当 f 属于 Schwarz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 时可进行分部积分并得到

$$\omega_n\int_V K_j(X,Y)f(Y)d\sigma(Y) = -\frac{1}{n-1}\int_{\mathbb{R}^n}|X-Y|^{-n+1}\frac{\partial f}{\partial y_j}dy, \tag{4.6}$$

其中　$Y=(y,\varphi(y))\in V$, 而 $X \notin V$.

若 $X=(x,t)$ 趋向于 $X_0=(x_0,\varphi(x_0))$, (4.6) 右端的极限可在实行变量替换 $y-x=u-x_0$ 之后利用 Lebesgue 控制收敛定理进行计算. 非切向收敛不起任何作用, 而计算类似于前节曾实行过的. 这就得到

$$-\frac{1}{n-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|x_0-y|^2+(\varphi(x_0)-\varphi(y)^2)\right)^{-(n-1)/2}\frac{\partial f}{\partial y_j}dy. \tag{4.7}$$

此时假定 φ 在 x_0 可微, 并进行一个反向的分部积分, 预先在 (4.7) 中把 $\int_{\mathbb{R}^n}\cdots dy$ 换成 $\int_{|x_0-y|\geq\epsilon}\cdots dy$. 这意味着利用 Green 公式, 在作完类似于前节的计算之后终得

$$\text{v. p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_{0,j}-y_j+(\varphi(y)-\varphi(x_0))\,\partial\varphi/\partial y_j}{(|x_0-y|^2+(\varphi(x_0)-\varphi(y)^2)^{(n+1)/2}}f(y)dy. \tag{4.8}$$

这个项正是对出现在定理 5 的主值的贡献之一.

出现在(4.3)中的跳跃项源于 $\widetilde{K}(X,Y)$, 即源于依靠定理 1 已经分析过的双层位势.

定理 5 证毕, 这里是它的一个推论.

推论 1　保持定理 5 的假设和记号, 则对所有的函数 $f\in L^2(V,d\sigma)$ 和几乎所有的 $X\in V$ 有

$$\lim_{Y\to X}\text{n. t. }\nabla Sf(Y)\cdot N(X)=\pm\frac{1}{2}f(x)+K^*f(x), \tag{4.9}$$

其中 $K^*: L^2(V,d\sigma) \to L^2(V,d\sigma)$ 是 K 的伴随算子，当 $Y=(y,t)$ 时符号 $\pm$ 跟 $t-\varphi(y)$ 的符号相反，最后 lim n.t. 表示非切向极限.

为证明这个推论，设 $\mathscr{T}: (L^2(V,d\sigma))^{n+1} \to L^2(V,d\sigma)$ 是分布核为 v.p. $\frac{1}{\omega_n}\frac{Y-X}{|Y-X|^{n+1}}$ 的向量值 Calderon-Zygmund 算子. 这个算子的存在性正是定理 5 的主旨. 用 $N: L^2(v,d\sigma) \to (L^2(V,d\sigma))^{n+1}$ 表示由向量 $N(Y)$ 定义的逐点乘法算子. 那么 $Kf(x)=$

$$\frac{1}{\omega_n}\text{ v.p. }\int\frac{Y-X}{|Y-X|^{n+1}}-N(Y)f(Y)d\sigma(Y)=\mathscr{T}Nf(X).$$

从而 $K=\mathscr{T}N$，过渡到伴随算子得 $K^*=N^*\mathscr{T}^*$. 而 $\mathscr{T}^*=-\mathscr{T}$，遂有

$$K^*f(X)=\frac{1}{\omega_n}N(X)\cdot\text{v.p. }\int\frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}}f(Y)d\sigma(Y), \tag{4.10}$$

这正是(4.9)右端的第二项.

推论 1 就此证毕，并且(4.9)的左端将不无欠妥地记为 $\frac{\partial}{\partial N}Sf(x)$. 还必须交待清楚在 V 的哪一侧取极限.

我们可以概括一下 3，4 两节有关 Dirichlet 和 Neumann 问题的结果.

就 Dirichlet 问题而言，从一个任意函数 $f\in L^2(V,d\sigma)$ 出发，假定存在一个函数 $g\in L^2(V,d\sigma)$ 使 $\left(\frac{1}{2}+K\right)g=f$. 那么定理 1 告诉我们 $u=\mathscr{K}(g)$ 是 Dirichlet 问题的解.

同样，假定存在一个函数 $h\in L^2(V,d\sigma)$ 使得 $\left(-\frac{1}{2}+K^*\right)h=f$. 那么 $v=S(h)$ 提供 Neumann 问题的解，正是(4.9)告诉我们这一点，其中的点 Y 是在位于 V 上方的开集 Ω 内.

剩下的是要证明算子 $\frac{1}{2}+K: L^2(V,d\sigma)\to L^2(V,d\sigma)$ 和 $-\frac{1}{2}$

$+K^{*}: L^{2}(V, d\sigma) \to L^{2}(V, d\sigma)$ 是同构.

当前还不存在对广义 Calderon-Zygmund 算子的象征演算；另外，K 不是紧的. 我们仅有的办法是 G. Verchota 提出的，它要利用属于 D. Jerison 和 C. Kenig 的值得注意的能量估计.

5. Jerison 和 Kenig 等式

沿用前面的记号. 假定 $f \in L^{2}(v, d\sigma)$，称 $u = S(f)$ 为由 f 产生的单层位势并要研究 u 的梯度 ∇u. 这个梯度在$\mathbb{R}^{n+1}\backslash V$ 内定义，并且当穿过 V 时，它在 V 上有法向间断. 对几乎所有的 $x \in V$，可定义切向梯度 $\nabla_{t} u(X)$，为此把 Y 趋向 X 时 $\nabla u(Y)$ 的非切向极限投影在 V 在 X 的切平面上

仍用 $N(X)$ 表示 V 在 X 的向下的单位法向量.

采用这些记号，则有

定理6 若 V 是一个 Lipschitz 图象，$f \in L^{2}(V, d\sigma)$，并且 $u = S(f)$，则有

$$\int_{V} |\nabla_{t} u|^{2} N d\sigma = \int_{V}\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^{2} N d\sigma + 2\int_{V} \frac{\partial u}{\partial N} \nabla_{t} u \, d\sigma \qquad (5.1)$$

以及

$$\int_{V} |\nabla_{t} u|^{2} N \, d\sigma = \int_{V}\left(\frac{\partial u}{\partial N} + f\right)^{2} N \, d\sigma + 2\int_{V}\left(\frac{\partial u}{\partial N} + f\right) \nabla_{t} u d\sigma. \qquad (5.2)$$

作为开始，我们注意到在应用(5.1)的证明到位于 V 的下方的开集 Ω 的条件下，(5.2)可由(5.1)导出，而为证明(5.1)，我们考虑位于 V 上方的开集 Ω. 当把 $\Omega = \Omega_{+}$ 换成 Ω_{-} 时，N 换为 $-N$，V 的指向外部的法向量. 另外，单层位势的法向导数改变符号，并且同样经受一个间断. 当在(5.2) 中保持跟(5.1) 中一样的法向量

时，(4.9) 中出现的跃度项必然带来从 $\frac{\partial u}{\partial N}$ 到$\frac{\partial u}{\partial N}+f$ 的改变.

这样就只需证明(5.1).

在要求 Ω 是一个正则有界开集并且 $V=\partial\Omega$ 时，我们略施一些技巧即可.

这时写下等式 $\nabla_t u=\nabla u-\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)N$，(5.1)便成为向量等式

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 N d\sigma=2\int_{\partial\Omega}\nabla u\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma. \tag{5.3}$$

为确立(5.3)，先把它变为数量等式，为此(5.3)跟常向量 $e\in\mathbb{R}^{n+1}$ 作内积. 这时只需验证

$$\int_{\partial\Omega}\{|\nabla u|^2 N\cdot e-2(\nabla u\cdot e)(\nabla u\cdot N)\}d\sigma=0. \tag{5.4}$$

应用 Green 公式就把(5.4)归结为

$\operatorname{div}\{|\nabla u|^2 e-2(\nabla u\cdot e)\nabla u\}=0$. 但这个散度等于 $-2(\nabla u\cdot e)\Delta u=0$，这是由于 u 是调和的.

为能够利用这一方法，我们要用一个递增正则有界开集序列 Ω_m 逼近 Ω. 边界 $\partial\Omega_m$ 分解为两部分 V_m 和 W_m. 另外，我们假定 f 是连续且有紧支集的. 那么对开集 Ω_m 写出(5.3)，$u=S(f)$ 是固定的，算子 S 是对于 V(而非 V_m)作出的. 然后证明

$$\int_{V_m}|\nabla u|^2 N_m d\sigma_m\to\int_V|\nabla u|^2 N d\sigma, \tag{5.5}$$

$$\int_{V_m}\nabla u\frac{\partial u}{\partial N_m}d\sigma_m\to\int_v\nabla u\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma. \tag{5.6}$$

而且 W_m 上的相应积分趋向于 0.

那么从对限制在 Ω_m 上的调和函数 u 写出的对应等式出发，过渡到极限，即得(5.3).

现在叙述逼近技术并验证极限过渡.

设 φ_m 百在$\mathbb{R}^n$ 上定义的实值或复值 Lipschitz 函数序列. 我们说这个序列狭义收敛到一个 Lipschitz 函数 φ，如果存在一个常数

C,使对所有整数$m\in\mathbb{N}$,有 $\|\nabla\varphi_m\|_\infty\leqslant C$,并且对几乎所有的$x$,$\nabla\varphi_m(x)\to\nabla\varphi(x)$. 在这些条件下,存在标准化常数$C_m$使函数$\varphi_m(x)+C_m$在所有紧集上一致收敛到$\varphi(x)$.

现从一个 Lipschitz 函数$\varphi(x)$出发,通过φ和$m^n g(mx)$作卷积把φ正则化,这就构造出φ_m,这里g是紧支无穷可导函数,其积分为 1. 那么函数序列φ_m狭义收敛到φ. 改变指标m的意义并且把φ_m加上一个常数$\varepsilon_m>0$,可以假定当$|x|\leqslant m+1$时$\varphi(x)<\varphi_m(x)<\varphi(x)+\frac{1}{m}$. 然后把$|x|\leqslant m$上方的$\varphi_m(x)$的图象$V_m$跟由$|x|=m+1,\varphi_m(x)+C\leqslant t\leqslant C'm$定义的截住,以及$|x|\leqslant m,t=C'm$连接起来,以便用这几片曲面和正则的连接曲面组一起组成一个有界正则开集Ω_m的边界$\partial\Omega_m$,对Ω_m可应用 Green 公式. 由构造,$\overline{\Omega}_m\subset\Omega$,以致在$\Omega$内调和的函数将在$\overline{\Omega}_m$的邻域内调和.

为证明(5.5),首先注意到,由于f有紧支集,在无穷远点,$\nabla u(x)$有阶$O(|x|^{-n})$. 由此推知类似于$\int_{V_m}|\nabla u|^2N_m d\sigma_m$的积分,只是$V_m$由$|x|>m$上方的$\varphi_m$的图象代替,当$m$趋向无穷时以 0 为极限.

作这一注释之后,(5.5)就归结为

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x,\varphi_m(x))|^2\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x,\varphi(x))|^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx,1\leqslant j\leqslant n.\qquad(5.7)$$

以及$\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}$和$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$换为1的类似等式. 为确立(5.7),应用狭义收敛定义和 Lebesgue 控制收敛定理. 事实上,定理 5 告诉我们

$$\omega(x)=\sup_{m\geqslant1}|\nabla u(x,\varphi_m(x))|^2\in L^1(\mathbb{R}).$$

(5.6)的论证是一样的.

Ω_m的外部边界上的积分趋向于 0,这是因为它们的面积是$O(m^{n-1})$,而被积函数是$O(m^{-2n})$.

为结束定理 6 的证明和过渡到 f 是 $L^2(V,d\sigma)$ 的任意函数的一般情形，今用 $Q_1(f)$ 和 $Q_2(f)$ 表示(5.1) 的两端. 由于定理 5，这两个二次齐式在 $L^2(V,d\sigma)$ 上是连续的. 并且它们在一个稠密向量子空间上一致. 因而它们在整个 $L^2(V,d\sigma)$ 上相等.

推论 1　当 f 属于 $L^2(V,d\sigma)$ 时，三个范数 $\left\|\left(\frac{1}{2}+K^*\right)f\right\|_2$，$\left\|\left(\frac{1}{2}-K^*\right)f\right\|_2$ 和 $\|\nabla_t S(f)\|_2$ 是等价的.

事实上，设 e 是向量$(0,\cdots,0,-1)$. V 在 Y 的指向下方的单位法向量 $N(Y)$ 有下列性质，当 $\|\nabla\varphi\|_\infty\leqslant M$ 时，内积 $N\cdot e$ 属于区间$[(1+M^2)^{-1/2},1]$.

(5.1) 或(5.3) 两端同 e 作内积并根据 Cauchy-Schwarz 不等式放大右端，则得

$$\int_V|\nabla_t u|^2 d\sigma\leqslant(1+M^2)^{1/2}\times\left(\int_V\left|\frac{\partial u}{\partial N}\right|^2 d\sigma+2\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_2\|\nabla_t u\|_2\right)\tag{5.8}$$

和

$$\int_V|\nabla_t u|^2 d\sigma\leqslant(1+M^2)^{1/2}\times\left(\int_V\left|\frac{\partial u}{\partial N}+f\right|^2 d\sigma+2\left\|\frac{\partial u}{\partial N}+f\right\|_2\|\nabla_t u\|_2\right)\tag{5.9}$$

而两个有穷正数 X 和 Y 之间的形如 $X^2\leqslant C(Y^2+2XY)$ 的不等式必然蕴涵 $X\leqslant C'Y$，这里 $C'=\sqrt{C+C^2}+C$. 从而由定理 5 得 $\|\nabla_t u\|_2\leqslant C'\|\partial u/\partial N\|_2$ 以及 $\|\nabla_t u\|_2\leqslant C'\|\partial u/\partial N+f\|_2$，这里 L^2 范数都是在 $L^2(V,d\sigma)$ 中计算的.

回到(5.1) 并重新跟 e 作内积得

$$(1+M^2)^{1/2}\int_V|\nabla_t u|^2 d\sigma\geqslant$$

$$\geqslant \int_V \left|\frac{\partial u}{\partial N}\right|^2 d\sigma - 2\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_2 \|\nabla_t u\|_2, \tag{5.10}$$

由此导出 $\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_2 \leqslant C' \|\nabla_t u\|_2$. 同样从(5.2)出发证得$\left\|f + \frac{\partial u}{\partial N}\right\|_2 \leqslant C' \|\nabla_t u\|_2$.

推论 2 在 $L^2(V,d\sigma)$ 上三个范数 $\left\|\left(\frac{1}{2}+K^*\right)f\right\|_2$, $\left\|\left(\frac{1}{2}-K^*\right)f\right\|_2$ 和 $\|f\|_2$ 是等价的,并且表示这些等价性的常数只依赖于 M,而不依赖满足 $\|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant M$ 的 Lipschitz 函数 φ.

事实上,由 K^* 的连续性推知 $\left\|\left(\frac{1}{2}\pm K^*\right)f\right\|_2 \leqslant C\|f\|_2$. 反之,我们有 $\|f\|_2 \leqslant \left\|\left(\frac{1}{2}+K^*\right)f\right\|_2 + \left\|\left(\frac{1}{2}-K^*\right)f\right\|_2$,再利用推论 1 即得结论.

6. 定理 2 和 3 证明的结尾

作为结束,需要证明在无界情形两个算子 $\pm\frac{1}{2}+K^*$ 在 $L^2(V,d\sigma)$ 上是同构,由此将得到其伴随算子 $\pm\frac{1}{2}+K$ 的同一性质,而为处理有界情形应作的修改可在 Verchota 的论文[232]中找到.

下列引理是指标理论的一个初等变体.

引理 4 设 H 是一个 Hilbert 空间,而 $\mathscr{L}(H,H)$ 是连续线性算子 $T:H\to H$ 的 Banach 代数.

设 $T(\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,是 $\mathscr{L}(H,H)$ 的元素的一个族,具有下列三个性质:

存在一个常数 $\delta > 0$，使对所有 $\lambda \in [0,1]$ 和所有 $x \in H$，有

$$\| T(\lambda)x \| \geqslant \delta \| x \|, \tag{6.1}$$

$$T(0): H \to H \text{ 是满射}, \tag{6.2}$$

存在 $\varepsilon > 0$，使当 $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda' \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant \lambda' - \lambda \leqslant \varepsilon$ 时

$$\| T(\lambda') - T(\lambda) \| \leqslant \delta/2, \tag{6.3}$$

则对所有 $\lambda \in [0,1]$，算子 $T(\lambda)$ 是 H 的同构.

首先注意若两个属于 $\mathscr{L}(H,H)$ 的算子 T_1 和 T_2 对某一个常数 $\delta > 0$ 满足三个条件：对所有 $x \in H$，$\| T_1(x) \| \geqslant \delta \| x \|$，$T_1$ 是满射，并且 $\| T_2 - T_1 \| < \delta$，则 T_2 也是 H 上的同构.

作了这个注释之后，从 $T(0)$ 出发，它是一个同构，由 (6.1) 和 (6.3) 可逐步验证 $T(\lambda)$，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，是同构.

在我们面临的应用中，(6.3) 来源于一个强得多的性质，即存在一个常数 C_0 使 $\left\| \frac{d}{d\lambda} T(\lambda) \right\| \leqslant C_0$.

我们利用引理 4 证明算子 $\frac{1}{2} \pm K^*: L^2(V, d\sigma) \to L^2(V, d\sigma)$ 是同构. 为此，对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，引入函数 $\lambda\varphi(x)$ 的图象 V_λ，并考虑相应算子 $\frac{1}{2} \pm K_\lambda^*$，这些算子作用在不同的空间 $L^2(V_\lambda, d\sigma_\lambda)$ 上. 为能够应用引理 4，系统地借助变量 $x \in \mathbb{R}^n$ 作为所有曲面 V_λ(其方程为 $t = \lambda\varphi(x)$) 参数表示的变量，以便把空间 $L^2(V_\lambda, d\sigma_\lambda)$ 等同于空间 $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

在这个变换以后，算子 $\frac{1}{2} \pm K_\lambda^*$ 变成奇异积分算子 $T(\lambda)$，它由分布核 $\frac{1}{2}\delta(x-y) \pm \text{v.p. } K_\lambda^*(x-y)$ 定义，这里

$$K_\lambda^*(x,y) = \frac{\lambda}{\omega_n} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - (y-x)\cdot\nabla\varphi(x)}{(|y-x|^2 + \lambda^2(\varphi(y) - \varphi(x))^2)^{(n+2)/2}},$$

显然 $T(0) = \frac{I}{2}$ 是一个同构，而定理 6 的推论 2 提供 (6.1).

为得上述结论，只需证明

$$\|T(\lambda') - T(\lambda)\| \leqslant C(M)(\lambda' - \lambda) \quad 若 0 \leqslant \lambda < \lambda' \leqslant 1. \tag{6.4}$$

为此，考虑相应于 K_λ^* 的截断核 $K_{\lambda,\varepsilon}^*$ 和对应算子 $T^\varepsilon(\lambda)$. 由定理 5 可知对所有函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，$\left\| T(\lambda)(f) - \frac{1}{2}f - T^\varepsilon(\lambda)(f) \right\|_2 \to 0$. 因此估计(6.4)将从下述估计推出

$$\|T^\varepsilon(\lambda') - T^\varepsilon(\lambda)\| \leqslant C(M)(\lambda' - \lambda). \tag{6.5}$$

为证明(6.5)，我们打算验证 $\left\| \frac{d}{d\lambda} T^{(\varepsilon)}(\lambda) \right\| \leqslant C(M)$. 由于核的奇异性已经消除，这个导数的计算是直接的. $\frac{d}{d\lambda}T^\varepsilon(\lambda)$ 的核写成 $A^{(\varepsilon)}(x,y) + B^{(\varepsilon)}(x,y)$，这两个截断核来自

$$A(x,y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - (y - x) \cdot \nabla\varphi(x)}{(|y - x|^2 + \lambda^2(\varphi(y) - \varphi(x))^2)^{(n+1)/2}}$$

和

$$(x,y) = \frac{n+1}{\omega_n} \times \lambda^2 \frac{\varphi(y) - \varphi(x))^2 \{\varphi(y) - \varphi(x) - (y - x) \cdot \nabla\varphi(x)\}}{(|y - x|^2 + \lambda^2(\varphi(y) - \varphi(x))^2)^{(n+3)/2}}.$$

不超过一个只依赖于 M 的常数，只要 $\|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant M$. 从而由第 7 章即可推出截断算子的一致估计.

7. 附　　录

为读者的方便，我们回顾引理 1 的证明. 今沿用普通的方案进行论证. 往证

$$\lim_{|y| \to 0} |y|^{-1}(f(x + y) - f(x) - y \cdot \nabla f(x)) = 0 \tag{7.1}$$

在我们感兴趣的 Banach 空间 B 中的一个稠密向量子空间 E 上成立，并且确立对应于(7.1) 的一个极大等式.

若我们考虑的空间 B 是 Lipschitz 函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 的空间，将会

陷入 C^1 类函数不组成 B 的稠密向量子空间这一困境. 这就导致用 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 代替 B, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 由本身连同其梯度(在分布意义下取的)都属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的函数组成.

我们打算证明当 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)(p>n)$ 时(7.1)式对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立, 现在, 若 $n<p<\infty$, Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{1,p}$ 内稠密, 于是只需确立极大不等式

$$\|\sup|y|^{-1}|f(x+y)-f(x)-y\cdot\nabla f(x)|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(p,n)\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{当 } n<p\leqslant\infty \text{ 时}. \tag{7.2}$$

$y\cdot\nabla f(x)$ 这一项是平凡是, 我们把它搁置一边, 并把注意力集中于 $|y|^{-1}|f(x+y)-f(x)|$. 令 $r=2|y|$, 并用 B 表示中心在 x 半径为 r 的球, (7.2)将从下式推出

$$|y|^{-1}|f(x+y)-f(x)| \leqslant C(p,n)\left(\frac{1}{|\Gamma 3|}\int_B|\nabla f|^p dy\right)^{1/p} \tag{7.3}$$

然后(7.3)的右端可放大为$(|\nabla f|^p)^*$, 根据 Hardy-Littlewood 定理, 如果 $p<r<\infty$, 它属于 $L^r(dx)$. 当 $n<p<\infty$ 时, 先得到用 p' 代替 p 的(7.3), 其中 p' 满足 $n<p'<p$, 这就推出(7.2).

为确立(7.3), 显然可化归到 $x=0$ 的情形. 把 $|f(y)-f(0)|$ 放大为 $|f(y)-f(r\nu)|+|f(r\nu)-f(0)|$, 其中 $r=2|y|$, 而 $\nu\in S^{n-1}$ 对 $\nu\in S^{n-1}$ 取平均, 利用等式

$$f(r\nu)-f(0)=\nu\cdot\int_0^r\nabla f(t\nu)dt \tag{7.4}$$

和

$$f(r\nu)-f(y)=(\nu-\nu^{-1}y)\cdot\int_0^r\nabla f(t\nu+(1-r^{-1}t)y)dt. \tag{7.5}$$

便导出形如 $\int_{S^{n-1}}\int_0^r\cdots dt\, d\sigma(\nu)$ 的两个积分. 再回到直角坐标系. Jacobi 行列式分别是 $|x|^{-n+1}$ 和 $|x-y|^{-n+1}$, 终得

$$|f(y)-f(0)|\leqslant C\int_B|\nabla f(x)|(|x|^{-n+1}+|x-y|^{-n+1})dx. \tag{7.6}$$

这里条件 $n < p < \infty$ 要发挥作用. 对(7.6)右端利用 Hölder 不等式. 基本着眼点是 $|x|^{-n+1} \in L^q(B)$,如果 $q < \frac{n}{n-1}$,即若 $p > n$.

计算的细节十分简单,留给读者.

Calderon 在[40]中用完全不同的方法证明了定理 2 和 3.

第 16 章　仿微分算子

1. 引　　言

仿微分算子由 J. M. Bony ([16])发现,他的目的是构造一个跟伪微分演算平行的演算,但要容纳由 C^r($r > 0$ 在下文中是固定的) 类的函数定义的乘法算子. 不过人们期望保留所有常系数微分算子. 自然这个要求是矛盾的,因为这直接导致一个任意的分布乘以 C^r 类的一个函数;若约定逐点乘法算子保持其通常的意义,这是不可能的.

J. M. Bony 所用的解决办法是用 a 和 f 之间的仿积 $\pi(a,f)$ 代替逐点乘法. 当 a 和 f 是两个缓增分布时,这个仿积有意义,仿微分算子代数 B_r($r > 0$) 将包含所有经典的伪微分算子 $\sigma(x,D) \in OpS^0_{1,0}$ 和所有由 C^r 类的函数定义的仿积算子.

人们这就得到了跟伪微分演算类似的性质,不同在于"误差项"是 r 阶正则化算子,而非原来的无穷正则化算子.

仿微分演算完全自然地加入到 Calderon 计划,其理由是多方面的.

首先,Calderon 在 1965 年,即伪微分演算诞生前十多年,确定了一个研究计划,其目的之一是借助伪微分演算研究非线性偏微分方程解的正则性,用 C^r 类的 x 的函数定义的逐点乘法算亦包括在伪微分演算之内.

其次,若 $a(x)$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$,相应仿乘法算子,它使 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 对应 $\pi(a,f)$,是一个 Calderon-Zygmund 算子.

最后,用到仿积的 J. M. Bony 线性化公式在全纯情形下跟

Calderon 的著名等式一致.

本章无意囊括有关仿微分演算的所有著作. 建议读者参考文集([18]),那里包含了 J. M. Bony 及其合作者的工作.

2. 非线性问题线性化的第一个例子

我们系统地用 $\mathscr{F}:\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示作用在缓增分布上的 Fourier 变换,有时也以 $\hat{f}$ 代替 $\mathscr{F}(f)$.

固定一个属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的辐射函数 φ,此外满足:当 $|\xi|\leqslant 1/2$ 时 $\varphi(\xi)=1$,当 $|\xi|\geqslant 1$ 时 $\varphi(\xi)=0$.

对所有 $j\in\mathbb{Z}$,部分和或滤波算子 S_j 由 $\mathscr{F}[S_j(f)](\xi)=\varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$ 定义. f 的"二进片断"由 $\Delta_j(f)=S_{j+1}(f)-S_j(f)$ 定义,或等价地由下式定义

$$\mathscr{F}[\Delta_j(f)](\xi)=\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi),\text{其中 }\psi(\xi)=\varphi(\xi/2)-\varphi(\xi). \tag{2.1}$$

因此这个 Fourier 变换 $\mathscr{F}(\Delta_j(f))$ 的支集含于"二进环形"

$$\Gamma_j=\{\xi\in\mathbb{R}^n;2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}\} \tag{2.2}$$

之内.

采用这些记号, f 的 "Littlewood-Paley 分解"是级数

$$f=S_0(f)+\Delta_0(f)+\cdots+\Delta_j(f)+\cdots, \tag{2.3}$$

在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中它收敛到 f.

事实上, φ 的各种选择导致不同分解.

非线性问题线性化的第一个例子由在下列经典定理证明中 Littlewood-Paley 分解的使用所提供.

定理 1 设 $F\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个在 0 取零值的函数. 若 $1<p<\infty$, $s>n/p$,那么对所有实值的属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ 的函数 f,复合函数 $F(f)$ 同样属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$. 若 $s=n/p$,并且 F 的导数 F' 有界,当 $f\in L^{p,s}$ 时仍有 $F(f)\in L^{p,s}$.

我们知道，若 $s > n/p$，$L^{p,s}$ 是一个代数. 定理 1 向我们指出无穷次可微函数在象征演算的意义下可以作用在这个代数上. 由于当 $s = n/p$ 时，$L^{p,s}$ 不再是一个代数，$F(t) = t^2$ 这种选择这时是禁止的.

为证明定理，在 $s > n/p$ 的情形，令 $f_j = S_j(f)$，遂有

$$F(f) = F(f_0) + (F(f_1) - F(f_0)) + \cdots + (F(f_{j+1}) - F(f_j)) + \cdots \tag{2.4}$$

级数(2.4)是一个套筒式级数，它一致收敛到 $F(f)$.

$F(f_0)$ 这项不出现困难，因为 f_0 及其所有的导数属于 L^p，由此得到 $F(f_0)$ 及其所有导数属于 L^p. 正是这里要利用假设 $F(0) = 0$.

然后写出

$$F(f_{j+1}) - F(f_j) = m_j \Delta_j(f), \tag{2.5}$$

其中

$$m_j(x) = \int_0^1 F'(f_j(x) + t\Delta_j f(x))dt. \tag{2.6}$$

忘掉 $m_j(x)$ 是由 f_j 出发而定义的，并且承认下列引理.

引理 1　若 $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ 并且 $s > n/p$ 或 $s = n/p$ 而且 $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$，则存在常数 $C_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$，使对所有 $j \in \mathbb{N}$，有

$$\| \partial^\alpha m_j(x) \|_\infty \leqslant C_\alpha 2^{j|\alpha|}.$$

今考虑下式定义的线性算子

$$\mathscr{L} u(x) = \sum_0^\infty m_j(x) \Delta_j u(x). \tag{2.7}$$

这个算子属于在 $O_p S_{1,1}^0$ 上. 事实上，它的象征是 $\sum_0^\infty m_j(x)\psi(2^{-j}\xi)$，而定义 $S_{1,1}^0$ 的估计正是由引理 1 所提供的. 因此算子 $\mathscr{L}$

在所有空间 $L^{p,r}$ 上是有界的，这里 $r>0, 1<p<\infty$（第10章第5节）. 特别地，只要 f 属于 $L^{p,s}$，就有 $\mathscr{L}(f)\in L^{p,s}$.

只留下证明引理1了. 先考察 $s>\frac{n}{p}$ 的情形. 由于 $f\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，我们有 $\|f_j\|_{\infty}\leqslant C$. 随之由 Bernstein 定理得 $\|\partial^{\alpha}f_j\|_{\infty}\leqslant C2^{(j+1)|\alpha|}$. 为了证明 $F(f_j+t\Delta_j(f))$ 满足同一类型的不等式，我们应用下列引理.

引理2 若函数 g_j 满足 $\|\partial^{\alpha}g_j\|_{\infty}\leqslant C_{\alpha}2^{j|\alpha|}$，这里 C_{α} 不依赖于 j，则函数 $F(g_j)=h_j$ 满足 $\|\partial^{\alpha}h_j\|\infty\leqslant C'_{\alpha}2^{j|\alpha|}$.

证实这一引理的一个有兴味的方式是考虑辅助函数 $\tilde{g}_j(x)=g_j(2^{-j}x)$，它满足 $\|\partial^{\alpha}\tilde{g}_j\|\leqslant C_{\alpha}$. 那么 $\tilde{h}_j=F(\tilde{g}_j)$ 满足 $\|\partial^{\alpha}\tilde{h}_j\|_{\infty}\leqslant C'_{\alpha}$，这应用 Faa di Bruno 的复合函数求导公式即可验证. 我们回忆一下这一公式.

为计算 $\partial^{\alpha}F(g)$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，用 q 表示属于 $[1,|\alpha|]$ 的一个整数，并以所有可能的方式把向量 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 分解成一个向量和 $\beta_1+\gamma+\cdots+\beta_q$，其中 $\beta_1\in\mathbb{N}^n,\cdots,\beta_q\in\mathbb{N}^n$. 作所有对应的乘积 $F^{(q)}(g)\partial^{\beta_1}g\cdots\partial^{\beta_q}g$，再对 α 的所有分解求和（q 固定），最后对 $q\in[1,|\alpha|]$ 的所有值求和.

若 $s=n/p$ 且 F' 属于 $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，显然有 $m_j\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. 注意到当 $|\alpha|\geqslant 1$ 时 $\|\partial^{\alpha}f_j\|_{\infty}\leqslant C_{\alpha}2^{j|\alpha|}$ 即可得到 m_j 的导数的上估式（尽管没有 $\|f_j\|_{\infty}\leqslant C_0$）.

3. 非线性问题的第二个线性化

两个缓增分布 a 和 f 之间的仿积定义为

$$\pi(a,f)=\sum_{2}^{\infty}S_{j-2}(a)\Delta_j(f). \tag{3.1}$$

这个级数在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的意义下收敛这件事毫不显然. 不过我们要

利用下列十分简单的事实予以验证.

引理3 设$u_j, j\in\mathbb{N}$,是属于$\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$的按多项式增长的函数,它们满足下列两个条件:

存在两个常数$\beta>\alpha>0$,使得分布$\mathscr{F}u_j$的支集含于$\alpha 2^j\leqslant|\xi|\leqslant\beta 2^j$ (3.2)

存在一个常数C和一个指数m,使得对所有$j\in\mathbb{N}$有$|u_j(x)|\leqslant C2^{mj}(1+|x|)^m$. (3.3)

则在$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$的意义下级数$\sum_0^\infty u_j(x)$收敛到一个缓增分布$S$.

反之,若S是一个缓增分布,则$u_j=\Delta_j(S)$满足(3.3)

现在验证这些条件,对某一个整数p有$|S_{j-2}(a)(x)|\leqslant C2^{pj}(1+|x|)^j$,并且$S_{j-2}(a)$的 Fourier 变换的支集含于中心为0半径为$\frac{1}{4}2^j$的球$B_j$. 同样,$|\Delta_j(f)(x)|\leqslant C2^{qj}(1+|x|)^q$,并且$\Delta_j(f)$的 Fourier 变换的支集含于由$\frac{1}{2}2^j\leqslant|\xi|\leqslant 2\cdot 2^j$定义的二进环$\Gamma_j$. 乘积$S_{j-2}(a)\Delta_j(f)$的 Fourier 变换的支集含于$B_j+\Gamma_j$,即含于环$\alpha 2^j\leqslant|\xi|\leqslant\beta 2^j$之内,其中$\alpha=1/4, \beta=9/4$. 因而引理适用.

在定义(3.1)中,两个指标之间的错开起本质的作用,不可以用$S_j(a)\Delta_j(f)$代替$S_{j-2}(a)\Delta_j(f)$;事实上,前一乘积的 Fourier 变换的支集含于球$|\xi|\leqslant\zeta\cdot 2^j$,并且级数$\sum_0^\infty S_j(a)\Delta_j(f)$一般在分布意义下发散. 为更好理解$\sum_2^\infty S_{j-2}(a)\Delta_j(f)$和$\sum_0^\infty S_j(a)\Delta_j(f)$之间的差别,宜于把这两个级数相减. 遂得$\sum\Delta_{j-\varepsilon}(a)\Delta_j(f)$,其中$\varepsilon=1$或2. 而为了计算我们的两个分布的乘积,利用 Littlewood-Paley 分解,本质上得到$\sum_{j\geqslant 0}\sum_{j'\geqslant 0}\Delta_j(a)\Delta_{j'}(f)=\sum_{j\leqslant j'-3}\Delta_j(a)\Delta_{j'}(f)+$

$$\sum_{j'\leqslant j-3}\sum \Delta_j(a)\ \Delta_{j'}(f) + \sum_{|j-j'|\leqslant 2}\sum \Delta_j(a)\Delta_{j'}(f) = \pi(a,f) + \pi(f,a)$$

$+ \sum_{|\varepsilon|\leqslant 2}\sum \Delta_{j-\varepsilon}(a)\Delta_j(f)$. 两个仿积都有意义，如果我们不能定义两个分布的乘积. 这无疑是由于级数 $\sum\Delta_{j-\varepsilon}(a)\Delta_j(f)$ 作怪，其中 $|\varepsilon| \leqslant 2$，对这个级数不能应用引理 3.

反之，在(3.1)中，可用 $S_{j-2}(a)$ 代替 $S_{j-20}(a)$. 这种改变不影响以下的定理 2 和定理 3.

回到 $f \in L^{p,s}$ 对应 $F(f)$ 的这种非线性运算的线性化.

兹有

定理 2 仍假定 $p \in]1,\infty[$, $r = s - n/p > 0$. 则对所有属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ 的函数 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和所有在 0 取零值的函数 $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ 有

$$F(f) = \pi(F'(f),f) + g, \tag{3.4}$$

其中 g 属于 $L^{p,s+2}$.

仿微分法的目的在于尽可能精确地局部化非线性偏微分方程解的奇异性. 但这些奇异性相关于一个正则性阈值；所有正则性高于这个阈值的函数都不再予以分析，而考虑为误差项. 出现在(3.4)中的函数 g 正属这种情形.

(3.4)的全纯变体值得在这里叙述，因为它涉及到在 Calderon 著作中早于仿积出现的双线性运算.

设 f 和 g 是两个在(开)上半平面 P 全纯的函数，并设在某种意义下在无穷远点 f 和 g 是零，Calderon 让他们对应第三个函数 h，它在 P 内全纯，由 $h'(z) = f(z)g'(z)$ 和 $h(i\infty) = 0$ 定义. 记 $h = \Pi(f,g)$.

设 f 是一个在 P 内全纯的函数，并且它连同其导数 f' 都属于全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^2(P)$. 用 K 表示 $f(P)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的闭包，用 F 表示在 K 的邻域内全纯并在 0 取零值的一个函数. 在这些条件下有

$$F(f) = \Pi(F'(f'),f). \tag{3.5}$$

事实上，$F(b)(i\infty) = F(0) = 0$，并且 $\frac{d}{dz}F(f) = F'(f(z))f'(z)$.

定理 2 推广并稍许改进了 Bony 的定理([16])，在[16]中，$p = 2$，并且 $s + r$ 换成 $s + r - \varepsilon(\varepsilon > 0$ 是任意的).

(3.4) 的证明的关键在于比较由(2.7) 定义并在第一个线性化中出现的算子 $\mathscr{L}$ 和由 $T_a(f) = \pi(a, f)$ 定义的算子 T_a.

若暂时承认下列引理.

引理 4 设 f 属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$，$s - n/p = r > 0$，又设 $\mathscr{L}$ 由(2.7) 定义，$a = F'(f)$，则 $\mathscr{L} - T_a$ 属于 Hörmander 的类 $OpS_{1,1}^{-r}$.

那么(3.4) 的证明就是直接的. 第一个线性化给出 $F(f) = F(S_0(f)) + \mathscr{L}(F)$，其中 $F(S_0(f))$ 已经可以看作误差项，这是因为它属于所有空间 $L^{p,m}$，$m \geqslant 0$. 进而有 $\mathscr{L}(f) = T_a(f) + R(f)$. 经得 $R(f) \in L^{p,s+r}$(第 10 章第 5 节).

为了证明 R 属于 $OpS_{1,1}^{-r}$，我们来计算其象征 $\rho(x, \xi)$. 它由 $\rho(x,\xi) = \sum_2^\infty q_j(x)\psi(2^{-j}\xi) + m_0\psi(\xi) + m_1(x)\,\psi(\xi/2)$ 给定，其中

$$q_j(x) = \int_0^1 F'(S_j(f) + t\Delta_j(f))dt - S_{j-2}(F'(f)). \quad (3.6)$$

我们要证明存在常数 $C_\alpha(\alpha \in \mathbb{N})$ 使得对所有 $j \in \mathbb{N}$ 有

$$\|\partial^\alpha q_j(x)\|_\infty \leqslant C_\alpha\, 2^{-jr}\, 2^{j|\alpha|}. \quad (3.7)$$

$\rho(x, \xi)$ 的两个孤立项 $m_0(x)\psi(\xi/2)$ 和 $m_1(x)\psi(\xi/2)$ 引出两个属于所有空间 $L^{p,s}(m \geqslant 0)$ 的函数，因此将不予考虑.

我们集中注意力到(3.7). 只需对 $|\alpha| > r$ 和 $\alpha = 0$ 确立这些不等式. 关于中间导数的对数凸性的经典不等式将允许对 $1 \leqslant |\alpha| \leqslant r$ 得到(3.7).

若 $\alpha = 0$，利用 Sobolev 嵌入 $L^{p,s} \subset C^r$，$r = s - n/p$，这里 C^r 表示非齐次 Hölder 空间，本著作已多次对它定义过了.

遂有 $\|f - S_j(f)\|_\infty \leqslant C2^{-rj}$，由此立刻得到 $\|F'(f) -$

$F'(S_j(f)+t\Delta_j)\|_\infty \leqslant C2^{-rj}$.

但 $F'(f)$ 同样属于 C^r，从而有 $\|F'(f)-S_{j-2}(F'(f))\|_\infty \leqslant C2^{-rj}$. 最后当 $\alpha=0$ 时，三角不等式提供(3.7).

还剩下证明当 $|\alpha|>r$ 时(3.7)成立. 不再利用三角不等式，并且不再顾及 $q_j(x)$ 是一个差，而要分别证明两个不等式

$$\|\partial^\alpha S_{j-2}(F'(f))\|_\infty \leqslant C_\alpha 2^{-jr}2^{j|\alpha|} \tag{3.8}$$

和

$$\|\partial^\alpha F'(S_j(f)+t\Delta_j)\|_\infty \leqslant C_\alpha 2^{-jr}2^{j|\alpha|}. \tag{3.9}$$

(3.8)的证明基于下列引理.

引理 5 若 g 属于 $C^r(\mathbb{R}^n)$，$r>0$，则存在这样的常数 C_α，对所有 $j\in\mathbb{N}$，若 $|\alpha|>r$，我们有

$$\|\partial^\alpha S_j(g)\|_\infty \leqslant C_\alpha 2^{j(|\alpha|-r)}. \tag{3.10}$$

作为开始，写下 $S_j(g)=S_0(g)+\Delta_0(g)+\cdots+\Delta_j(g)$. 由于对所有 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ $\|\partial^\alpha S_0(g)\|\leqslant C_\alpha$，$S_0(g)$ 这一项不带来任何问题. 进而有 $\|\Delta_j(g)\|_\infty \leqslant C2^{-jr}$，并且根据 S. Bernstein 不等式，有 $\|\partial^\alpha\Delta_j(g)\|_\infty \leqslant C2^{|\alpha|(j+r)}2^{-jr}$. 由于 $|\alpha|>r$，$1+\cdots+2^{j(|\alpha|-r)}\leqslant C2^{j(|\alpha|-r)}$，这就完成了引理 5 的证明.

现过渡到(3.9)的证明. 令 $f_j=S_j(f)+t\Delta_j(f)$ 以便稍许变更一下记号. 我们仅需要从 f_j 的定义撷取下列性质

$$\|f_{j+1}-f_j\|_\infty \leqslant C\,2^{-jr},\qquad j\in\mathbb{N}, \tag{3.11}$$

$$\|\partial^\alpha f_j\|_\infty \leqslant C_\alpha\,2^{j(|\alpha|-r)}\ \text{对于}\ |\alpha|>r, j\in\mathbb{N}. \tag{3.12}$$

进而应用下列引理.

引理 6 设 f_j，$j\in\mathbb{N}$，是一个满足(3.11)和(3.12)的无穷可微的函数序列. 则对所有函数 $F\in C^\infty(\mathbb{R})$，$F(f_j)$ 仍满足(3.11)和(3.12)，只不过常数 C 和 C_α 换成另外的常数 C' 和 C'_α.

(3.11) 是显然的，我们集中注意力于(3.12). 仅有的困难是导数 $\partial^\alpha F(f_j)(|\alpha| > r)$ 的计算涉及到 $\partial^\beta f_j, |\beta| \leqslant r$，对这些导数(3.12)是不成立的. 为摆脱这一困境，特作几个注释.

首先由(3.11)和(3.12)推出

$$\| \partial^\alpha (f_{j+1} - f_j) \|_\infty \leqslant C_\alpha\, 2^{j|\alpha|}\, 2^{-rj}, \text{对所有 } \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (3.13)$$

在我们所关心的具体情况，这没有告诉我们什么新内容，而在引理 6 的假设之下，(3.11)从 $\alpha = 0$ 和 $|\alpha| > r$ 的情形经由凸性推出.

于是可忘掉(3.11)，只记住有

$$\| \partial^\alpha f_j \|_\infty \leqslant C \qquad \text{若 } |\alpha| < r \qquad (3.14)$$

和

$$\| \partial^\alpha f_j \|_\infty \leqslant C(1 + j), \text{若 } |\alpha| = r. \qquad (3.15)$$

然后利用 Faa di Bruno 等式计算 $\partial^\alpha F(f_j)$. 必须在条件 $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_q$ 和 $|\alpha| > r$ 之下从上估计 $\| \partial^{\beta_1} f_j \|_\infty \cdots \| \partial^{\beta_q} f_j \|_\infty$. 为此综合(3.14)，(3.15)和(3.12)得

$$\| \partial^\beta f_j \|_\infty \leqslant C\, 2^{j|\beta|(1-r/|\alpha|)} \quad \text{对 } 0 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha| < r. \qquad (3.16)$$

不等式(3.16)比(3.14)，(3.15)和(3.12)更粗糙，除非 $|\beta| = |\alpha|$，这时(3.16) 和(3.12) 一致.

由于 $|\alpha| = |\beta_1| + \cdots + |\beta_q|$，遂得所宣布的估计

$$\| \partial^{\beta_1} f_j \|_\infty \cdots \| \partial^{\beta_q} f_j \|_\infty \leqslant C'\, 2^{j|\alpha|(1-r/|\alpha|)} = C' 2^{-jr} 2^{j|\alpha|}.$$

定理 2 这就证明完毕. 在我们面临的应用中，并不是定理 2 而是其高维变形允许局部化非线性偏微分方程解的奇异带.

设 $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ 是 N 个实变量 $u_1, \cdots, u_N$ 的无穷可微函数，假定 $F(0) = 0$，用 F_j 表示其 N 个偏导数 $\partial F/\partial u_j, 1 \leqslant j \leqslant N$.

设 $r = s - n/p > 0; p \in]1, \infty[$，又设 $f = (f_1, \cdots, f_N)$ 是一个在 $\mathbb{R}^N$ 中取值的函数，它属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$. $F(f) = F(f_1, \cdots, f_N)$ 的计算则由下列定理提供.

定理 3 在前述假设之下，有

$$F(f) = \sum_{1}^{N} \pi(F_j(f), f_j) + g, \tag{3.17}$$

其中 $g \in L^{p,s+r}$.

定理 3 的证明跟定理 2 一样，留给读者.

在结束本节之前，再给一个对研究仿微分算子有用的引理.

引理 7 设 $f_j, j \in \mathbb{N}$ 是一个属于 $C^\infty(R^n)$ 的函数的序列，当 j 趋向于无穷时其行为由下列条件描述：

存在 $r > 0$ 和常数 C_0，使对所有 $j \in \mathbb{N}$ 有 $\| f_j \|_{C^r} \leqslant C_0$,

$$\tag{3.18}$$

存在常数族 C_β 使得当 $|\beta| > r$ 时对所有 $j \in \mathbb{N}$ 有 $\| \partial^\beta f_j \|_\infty \leqslant C_\beta 2^{j(|\beta| - r)}$. (3.19)

则可把 f_j 分解为

$$f_j = g_j + h_j, \tag{3.20}$$

其中

g_j 的 Fourier 变换的支集含于球 $|\xi| \leqslant 2^{j-10}$, (3.21)

$\| g_j \|_{C^r} \leqslant C'_0$，对所有 $j \in \mathbb{N}$, (3.22)

并且

$\| \partial^\beta h_j \|_\infty \leqslant C'_\beta 2^{j(|\beta| - r)}$，对所有 $\beta \in \mathbb{N}^n$. (3.23)

为证引理，对 f_j 进行 Littlewood-Paley 分解，写成 $f_j = S_{j-10}(f_j) + \Delta_{j-10}(f_j) + \cdots$，令 $g_j = S_{j-10}(f_j)$，$h_j = \sum_{l \geqslant j-10} \Delta_l(f_j)$. 这时(3.21) 和(3.22) 是显然的. 致于(3.23)，利用(3.19) 得知 $\| \Delta_l(f_j) \|_\infty \leqslant C_m 2^{(j-l)m} 2^{-jr}$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 成立，这再结合 S. Bernstein 不等式即蕴涵(3.23).

注意，(3.22) 和(3.23) 反过来蕴涵(3.19).

4. 仿微分算子

设 r 是一个正数，下文中它是固定的. 按照 J. M. Bony 的方法，我们将构造一个含于 G. Bourdand 代数内的算子代数以及一个象征演算，这一象征演算允许我们的代数内的算子，以 r 阶正则化算子为模求逆，所谓 r 阶正则化算子即这样的算子，它的象征属于在定理 2 的证明中曾利用过的类 $S_{1,1}^{-r}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. 一个 r 阶正则化算子从 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p,s+r}(\mathbb{R}^n)$ 是连续的，只要 $s+r>0$，$1<p<\infty$（第 10 章第 5 节）. 并且对 Besov 空间有一个类似的结果.

Bourdaud 代数由这样的算子 T 组成，它以及它的伴随算子 T^* 属于 $O_pS_{1,1}^0$；在第 9 章讲述这一代数，它显露出一个缺陷，即不具有合理的象征演算. 在某种意义上来说，Bourdaud 代数过于宽阔，我们要对它加以修正，为此对所用的象征附加关于变量 x 的一个正则性，此正则性以实数 $r>0$ 度量，并在下文中保持固定.

可不费什么力气同样定义 m 阶象征，尽管我们将进行的计算仅涉及 0 阶算子.

最后，在下列定义中，C^r 表示非齐次 Hölder 空间；C^r 内的 f 的范数包含 L^∞ 范数. 这类空间前几章曾充分讲述，不再赘言.

定义 1 设 r 是一个正实数. 一个函数 $\sigma(x,\xi)$ 属于象征的类 A_r^m，如果 $\sigma(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 并且下列两个条件满足

存在常数 $C(\alpha)$，$\alpha\in\mathbb{N}^n$，使得由 $\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)$ 定义的变量 x 的函数全属于 $C^r(\mathbb{R}^n)$，并且还有

$$\|\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)\|_{C^r(\mathbb{R}^n)}\leqslant C(\alpha)\ (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{4.1}$$

存在常数 $C(\alpha,\beta)$，$\alpha\in\mathbb{N}^n$，$\beta\in\mathbb{N}^n$，使对 $\beta_l>r$ 有

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)|\leqslant C(\alpha,\beta)(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\beta|-r}. \tag{4.2}$$

换言之，为了得到关于 x 的不超过 r 的正则性，不需付任何代

价，若要超过了 r，必须支付代价.

若 $r=+\infty$，就又回到通常的类 $S^0_{1,0}$.

借助于这类象征可用通常的形式定义算子 $\sigma(x,D)$

$$\sigma(x,D)[e^{ix\cdot\xi}]=\sigma(x,\xi)e^{ix\cdot\xi}. \tag{4.3}$$

下列定义更接近于 J. M. Bony 的观点([16]).

定义 2 集 B^m_r 由属于 A^m_r 并满足下列条件的象征 $\sigma(x,\xi)$ 组成：对所有固定的 ξ，$\sigma(x,\xi)$ 看作 x 的函数的偏 Fourier 变换的支集含于球 $|\eta|\leqslant\dfrac{1}{10}|\xi|$.

还可这样定义 B^m_r，不提 $\sigma\in A^m_r$，但要求(4.1)和定义 2 的最后一个条件，那么(4.2)即可推出，这从重读引理 7 的证明即可确信.

提请读者验证，对所有实数 m 有

$$S^m_{1,0}\subset A^m_r\subset S^m_{1,1}\subset A^{m+r}_r.$$

若 $s\geqslant r$，显然有 $A^m_s\subset A^m_r$. 正如我们已经注意到的，B^m_r 含于 A^m_r.

若 $m=0$，我们将把 A^0_r 和 B^0_r 写成 A_r 和 B_r.

一如通常情形，$\sigma(x,\xi)$ 属于 A^m_r 或 B^m_r，当且仅当 $(1+|\xi|^2)^{-m/2}\sigma(x,\xi)$ 属于 A_r 或 B_r，这允许把许多问题化到 $m=0$ 的情形.

A_r 和 B_r 之间的关系由下列引理阐明.

引理 8 对于一个函数 $\sigma(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，下列两个性质是等价的.

$$\sigma(x,\xi)\in A_r, \tag{4.4}$$

$\sigma(x,\xi)=\tau(x,\xi)+\rho(x,\xi)$，其中 $\tau(x,\xi)\in B_r$ 并且 $\rho(x,\xi)\in S^{-r}_{1,1}$. (4.5)

正如我们已经注意到的，$S^{-r}_{1,1}$ 含于 A_r. 于是很清楚，(4.5) 蕴涵 (4.4). 反之，回到 Littlewood-Paley 分解的记号，写下 $1=\varphi(\xi)+$

$\sum_{0}^{\infty}\psi(2^{-j}\xi)$，其中 $\sigma_j(x,\xi)=\sigma(x,\xi)\,\psi(2^{-j}\xi)$. 然后利用引理 7 分解 x 的每一函数 $\sigma_j(x,\xi)$.

引进 A_r 的理由在于对于普通乘法，A_r 是一个代数. 更精确地说有

引理 9 设 $\sigma_1(x,\xi),\cdots,\sigma_N(x,\xi)$ 是 N 个属于 A_r 的实值象征. 对所有函数 $F\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$，$F(\sigma_1(x,\xi),\cdots,\sigma_N(x,\xi))$ 属于 A_r.

(4.1) 的验证没任何问题，而(4.2) 的验证跟引理 6 的证明一致，现在 $1+|\xi|$ 起 2^j 的作用.

推论 1 设 $\sigma_1(x,\xi)$ 和 $\sigma_2(x,\xi)$ 是两个实值或复值的属于 A_r 的象征. 假定存在一个常数 $\delta>0$，使得 $\sigma_1(x,\xi)\neq 0$ 蕴涵 $|\sigma_2(x,\xi)|\geqslant\delta$. 定义 $\sigma_3(x,\xi)$ 如下，若 $\sigma_1(x,\xi)=0$，令 $\sigma_3(x,\xi)=0$，否则 $\sigma_3(x,\xi)=\dfrac{\sigma_1(x,\xi)}{\sigma_2(x,\xi)}$. 则 $\sigma_3(x,\xi)$ 也属于 A_r.

事实上，设 $F(u,v)$ 是两个实变量 u 和 v 的无穷可微函数，当 $\sqrt{u^2+v^2}\geqslant\delta$ 时它跟 $\dfrac{1}{u+iv}$ 重合. $\sigma_2(x,\xi)$ 的实部记作 $\alpha_2(x,\xi)$，而它的虚部记作 $\beta_2(x,\xi)$，并且首先构成 $F(\alpha_2(x,\xi),\beta_2(x,\xi))$. 由于引理 9 这个新的象征属于 A_r，从而最后对乘积 $\sigma_1(x,\xi)F(\alpha_2(x,\xi)\beta_2(x,\xi))=\sigma_3(x,\xi)$ 也如是.

推论 2 设 $\sigma(x,\xi)$ 是一个属于 A_r 的象征. 假定对某个 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和某个 $\xi_0\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 有

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}|\sigma(x_0,\lambda\xi_0)|=0,\tag{4.7}$$

则存在一个无穷可微的函数 $u(x)$，在 x_0 等于 1，还存在一个在整个$\mathbb{R}^n$ 上无穷可微的函数 $v(\xi)$，它满足：若 $|\xi|\geqslant 1$ 并且 $\lambda>1$，$v(\lambda\xi)$

$= v(\xi)$；又若 $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$，则 $v(\lambda \xi_0) = 1$. 最后还有一个象征 $\tau(x,\xi) \in A_r$ 使得

$$\sigma(x,\xi)\tau(x,\xi) = u(x)v(\xi). \tag{4.8}$$

事实上，用 $2\delta > 0$ 表示出现在(4.7)中的下极限. 由(4.1)给的 $\sigma(x,\xi)$ 的正则性推知当 $|x' - x| \leqslant \eta(\varepsilon)$ 并且 $|\xi' - \xi|/|\xi| \leqslant \eta(\varepsilon)$ 时 $|\sigma(x',\xi') - \sigma(x,\xi)| \leqslant \varepsilon$. 特别若 $|x - x_0| \leqslant \eta$, $|\xi - \xi_0| \leqslant \eta$ 并且 $\lambda \geqslant R$，则有 $|\sigma(x,\lambda\xi)| \geqslant \delta > 0$.

取一个函数 $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，它在 x_0 等于1，在 $|x - x_0| \leqslant \eta$ 外是零. 同样，$v(\xi)$ 在0的邻域内以及在一个顶点为0底为球 $|\xi - \xi_0| \leqslant \eta$ 的旋转锥之外为零，此外，当 $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ 时 $v(\lambda\xi_0) = 1$.

那么只需对商 $\dfrac{u(x)v(\xi)}{\sigma(x,\xi)}$ 应用推论1即得结论.

5. 仿微分算子的象征演算

对于仿微分算子的象征演算将从下列结果导出.

定理 4 设 $\tau(x,\xi)$ 是一个属于 Hörmander 类 $A^0_{1,1}$ 的一个象征，而 $\sigma(x,\xi)$ 是一个属于 B_r 的象征，$r > 0$. 则有

$$\tau(x,D)\cdot\sigma(x,D) = \gamma(x,D) + \rho(x,D), \tag{5.1}$$

其中

$$\gamma(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \frac{(-i)^\alpha}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau(x,\xi) \partial_x^\alpha \sigma(x,\xi), \tag{5.2}$$

而 $\rho(x,\xi) \in S^{-r}_{1,1}$.

计算 $\gamma(x,\xi)$ 的公式自然跟通常演算中的公式是一样的. 唯一的差别是中止在 r 阶. 因而经典的伪微分演算可看作 r 趋向无穷时

(5.1) 的极限.

为了应用这个定理，宜于按等级把出现在(5.2) 中的项分类. 我们有 $\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\in S_{1,1}^{-|\alpha|}$，同样，若 τ 属于 B_r，则有 $\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\in B_r^{-|\alpha|}$. 但这一得益马上由于 $\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)$ 的缺陷亏损掉，对 $\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)$，最好也不过说出 $\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)\in B_r^{|\alpha|}$. 即是说在最好的情况下(即 σ 和 τ 都属于 B_r)，(5.2) 右端的所有项在 A_r 内有同样的阶，无从确立一个等级.

反之，若在类 $S_{1,1}^m$ 中安置这些项，阶便显露出来. 若 r 不是一个整数，$\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\ \partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)\in S_{1,1}^{-|\alpha|}$，$0\leqslant|\alpha|<r$，以致误差项不与任何已写出的项混淆. 若 r 是一个整数，并且 $|\alpha|=r$，对所有 $\varepsilon>0$ 仍有 $\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)\in S_{1,1}^\varepsilon$，但不包括 $\varepsilon=0$(因为当 $r\in\mathbb{N}$ 时 Hölder 空间 C^r 应通过 Zygmund 类定义).

现在过渡到定理 4 的证明. 利用 Wiener 代数 $A=A(\mathbb{R}^n)$ 的几个熟知性质是方便的. A 由这样的在无穷远点为零的连续函数组成，它们是函数 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}$. $\hat{f}$ 在 A 内的范数定义为 f 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 内的范数.

引理 10 若 $u(x)$ 属于 $A(\mathbb{R}^n)$，则对所有 $t>0$，$u(tx)$ 也属于 $A(\mathbb{R}^n)$，并且它的范数跟 u 的相同.

引理 11 当 $s>n/2$ 时，Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 含于 $A(\mathbb{R}^n)$.

为了证明定理 4，我们利用在通常的伪微分算子的习惯场合所作的同样的计算. 不同的只是估计. 特别地，$\rho(x,\xi)$ 由一个经典公式表达，我们就来回忆这一公式. 对所有固定的 ξ，把作为变量 x 的函数 $\sigma(x,\xi)$ 的 Fourier 变换的分布记作 $S(\eta,\xi)$. 由于 $\sigma\in B_r$，这个分布由球 $|\eta|\leqslant\frac{1}{10}|\xi|$ 支撑. 采用有些含混的记号，我们把 $\langle S(\cdot,\xi),\varphi(\cdot)\rangle$ 记为 $\int\varphi(\eta)S(\eta,\xi)d\eta$. 在上述条件下有

$$\rho(x,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\tau(x,\xi+\eta)-\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{\eta^\alpha}{\partial\alpha!}\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\right\}$$
$$\times e^{i\eta\cdot x}S(\eta,\xi)d\eta. \tag{5.3}$$

我们满足于确立 $|\rho(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-r}$，而请读者验证不等式 $|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\rho(x,\xi)|\leqslant C(\alpha,\beta)(1+|\xi|)^{-r+|\beta|-|\alpha|}$ 的证明是一样的.

为了分析 $\rho(x,\xi)$，我们再次利用 Littlewood-Paley 分解，其形式是 $1=\varphi(\eta)+\sum_0^\infty\psi^2(2^{-j}\eta)$. 一切如同惯常情形，$\varphi$ 由 $|\eta|\leqslant 1$ 支撑，而$\psi(\eta)$ 由$\frac{1}{3}\leqslant|\eta|\leqslant 1$ 支撑. 把乘积 $S(\eta,\xi)\psi(2^{-j}\xi)$ 记作 $S_j(\eta,\xi)$，再令 $T_j(x,\eta,\xi)=\left\{\tau(x,\xi+\eta)-\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\right\}$ $\cdot\,\psi(2^{-j}\eta)$ 这些准备好了之后，写下

$$\rho_j(x,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}T_j(x,\eta,\xi)e^{i\eta\cdot x}S_j(\eta,\xi)d\eta. \tag{5.4}$$

最后有

$$\rho(x,\xi)=\tilde{\rho}(x,\xi)+\sum_{j=0}^J\rho_j(x,\xi), \tag{5.5}$$

其中 J 是满足 $2^j>\frac{3}{10}|\xi|$ 的最小整数，而 $\tilde{\rho}(x,\xi)$ 类似于 $\rho_0(x,\xi)$，其中的 $\psi(\xi)$ 换成 $\varphi(\xi)$.

用 $m\in\mathbb{N}$ 表示 r 的整数部分；$m\leqslant r<m+1$. 我们意欲验证下列估计，

$$|\rho_j(x,\xi)|\leqslant C\,2^{j(m+1-r)}(1+|\xi|)^{-m-1}. \tag{5.6}$$

同样的证明对 $\tilde{\rho}(x,\xi)$ 也适用，把不等式对 $0\leqslant j\leqslant J$ 相加即得 $|\rho(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-r}$.

为证明(5.6)，我们忘掉变量 x 和 ξ，它们仅起参数作用. 集中注意力于变量 η，并定义 $A_j\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $B_j\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 如下：

$\hat{B}_j(\eta)=e^{i\eta\cdot x}S_j(\eta,\xi)$，

而 $\hat{A}_j(\eta)=\left\{\tau(x,\xi+\eta)-\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\right\}\psi(2^{-j}\eta)$.

由于$\sigma(x,\xi)$属于C^r,Hölder 空间,通过 Littlewood-Paley 分解所作的表征直接给出 $\|B_j\| \leqslant C\,2^{-jr}$.

今有$\rho_j(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\int \hat{A}_j(\eta)\hat{B}_j(\eta)d\eta=\int A_j(u)B_j(-u)du$,因此$|\rho_j(x,\xi)|\leqslant \|A_j\|_1\|B_j\|_\infty$.余下的是估算$\|A_j\|_1$.为此,首先利用引理 10,并且致力于估计

$$g_j(y)=\left\{\tau(x,\xi+2^jy)-\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{(2^jy)^2}{\alpha\,!}\partial_\xi^\alpha\tau(x,\xi)\right\}\psi(y)$$

在A内的范数.回想起$j\in\mathbb{N}$应当满足条件$2^j\leqslant\frac{3}{10}|\xi|$,因此当$\psi(y)\neq 0$时有$|\xi+2^jy|\geqslant|\xi|-2^j\geqslant\frac{7}{10}|\xi|$.于是利用象征$\tau(x,\xi)$关于$\xi$的正则性得$|g_j(y)|\leqslant C\,2^{j(m+1)}(1+|\xi|)^{-m-1}$,同样地,$|\partial_y^\alpha g_j(y)|\leqslant C_\alpha(2^j(1+|\xi|)^{-1})^{|\alpha|+m+1}$.因此$g_j(y)$在$H^s(\mathbb{R}^n)$中的范数不超过$\left(\frac{2^j}{1+|\xi|}\right)^{m+1}$,此即给出(5.6).

我们曾经指出,$\rho(x,\xi)$的关于x和ξ的导数的估计用同样的推理可以得到,终有$\rho(x,\xi)\in S_{1,1}^{-r}$.

推论 设$\sigma(x,\xi)$是一个属于B_r的象征,假定对某个$x_0\in\mathbb{R}^n$和某个$\xi_0\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$,有$\liminf\limits_{\lambda\to+\infty}|\sigma(x_0,\lambda\xi_0)|>0$.则在代数$A_r$内存在一个象征$\tau(x,\xi)$和满足引理 9 的推论 2 的两个函数$u(x)$和$v(\xi)$,使得

$$\tau(x,D)\circ\sigma(x,D)=u(x)v(D)+\rho(x,D),\qquad(5.7)$$

其中ρ属于 Hörmander 类$S_{1,1}^{-r}$.

为证明(5.7),沿用通常的方法,找一个具有形式$\tau=\tau_0+\cdots+\tau_m$的$\tau$,其中,对于$0\leqslant q\leqslant m$,$\tau_q\in S_{1,1}^{-q}\cap A_r$,$m$仍由$m\leqslant r<m+1$定义.若$r=m$,最后一个条件$\tau_m\in S_{1,1}^{-m}\cap A_r$换成$\tau_m\in S_{1,1}^{-m+\varepsilon}\cap A_r$,$\varepsilon>0$任意.

应用定理 4 以计算$\tau_q(x,D)\circ\sigma(x,D)$,并得到$\gamma_q(x,D)+$

$\rho_q(x,D)$，其中

$$\gamma_q(x,\xi) = \tau_q(x,\xi)\sigma(x,\xi) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant r-q} (i)^{|\alpha|}/\alpha!\ \partial_\xi^\alpha \tau_q(x,\xi)\partial_x^\alpha \sigma(x,\xi), \quad (5.8)$$

并且 $\rho_q \in S_{1,1}^{-r}$.

(5.8) 右端的各项属于 $S_{1,1}^{-q}, S_{1,1}^{-q-1}$，等等…当 $q=0, |\alpha|=m=r$，最后一项属于 $S_{1,1}^{-m+\varepsilon}(\varepsilon>0)$. 最后，若 $q=m$，(5.8) 的右端仅含一项，即 $\tau_m(x,\xi)\sigma(x,\xi)$.

应用引理 9 的推论 2 以用(4.8) 定义 $\tau_0(x,\xi)$，$u(x)$ 和 $v(\xi)$. 策略的本质在于进而通过 τ_{q+1} 的适当选取校正出现在(5.8)右端的所有误差项. 今以尽可能简单的方式进行，即要求

$$\tau_{q+1}(x,\xi)\sigma(x,\xi) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant r-q} \frac{(i)^\alpha}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau_q(x,\xi)\partial_x^\beta \sigma(x,\xi) = 0.$$

为实现这个选择，宜于注意象征 $\tau_q(x,\xi)$ 的支集含于乘积 $u(x)v(\xi)$ 的支集内. 考虑到在 $u(x)v(\xi)$ 的支集上 $|\sigma(x,\xi)|\geqslant\delta>0$，我们可以应用引理 9 的推论 1.

6. 对非线性偏微分方程的应用

我们叙述并证明非线性偏微分方程解的一个正则性定理. 在这个结果之后，J. M. Bony 同其合作者证明了许多其他的结果，读者可参见[18].

作为开始，把仿积算子 $\pi(a,f)$ 跟定义 2 中的类 A_r 联系起来，其中 $a(x)$ 属于 $C^r(\mathbb{R}^n)$. $\pi(a,f)$ 的象征是 $\sigma(x,\xi) = \sum_2^\infty S_{j-2}(a)\psi(2^{-j}\xi)$，而条件(4.1) 和(4.2) 显然满足.

致于类 B_r，$\sigma(x,\xi)$ 的关于 x 的 Fourier 变换的支集含于 $|\eta|\leqslant\frac{1}{2}|\xi|$(代替 $|\eta|\leqslant\frac{1}{10}|\xi|$). 把 $S_{j-2}(a)$ 换成 $S_{j-5}(a)$ 时得到一个系数 $\frac{1}{10}$. 这个修改的效果何在? 对于定理 2 和 3，什么都没改变.

事实上，我 们 的 修 改 带 来 误 差 项 $\sum_{5}^{\infty} \Delta_{j-3}(a)\Delta_j(f),\cdots$, $\sum_{5}^{\infty}\Delta_{j-5}(a)\Delta_j(f)$，而这些项显然属于 $L^{p,s+r}$，只要 f 属于 $L^{p,s}$，并且 $a(x)$ 属于 C^r.

因而在本节我们将假定伪积由 $\sum_{5}^{\infty} S_{j-5}(a)\Delta_j(f)$ 定义.

现在考虑一个非线性偏微分方程

$$F(x,f(x),\cdots,\partial^\alpha f(x),\cdots) = 0, \tag{6.1}$$

其中 $|\alpha| \leqslant m, F \in C^\infty(\mathbb{R}^N), f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

函数 F 给定，m 是方程的阶，$N-1$ 是长度 $|\alpha| \leqslant m$ 的 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 的个数，而 f 是未知函数.

这个方程的非线性特征导致我们作正则性的整体假设. 这个假设避免了在(6.1)中出现分布的乘积. 我们将利用或者 $f(x) \in C^{s+m}(\mathbb{R}^n)$，$s > 0$，或者 $f(x) \in L^{p,s+m}$，这里 $s - \frac{n}{p} = r > 0$. 那么出现在(6.1)中的所有导数 $\partial^\alpha f(x)$，$|\alpha| \leqslant m$，属于 C^r，从而 $f(x)$ 在古典意义下满足(6.1).

我们的目的是证明 $f(x)$ 微局部地是更正则的. 正则性的增值等于 r.

特征带是$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 的闭子集 Γ，下面的定理 5 的结论是说 $f(x)$ 在特征带之外是微局部地 C^{r-m+m}(或 $L^{p,s+m+r}$) 正则的.

我们还是回到精确提法，并从定义 Γ 开始. 事实上，$\Gamma = \Gamma(f)$ 依赖于(6.1)的我们要研究其正则性的解 f，它是这样的 $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 集合，它们使得

$$\sum_{|\alpha|=m} (i\xi)^\alpha C_\alpha(x) = 0, \tag{6.2}$$

其中

$$C_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x,f(x),\cdots,\partial^\beta f(x),\cdots). \tag{6.3}$$

这里 $u_\alpha \in \mathbb{R}$ 是 F 所依赖的各个变量；在(6.1)中 u_α 由 $\partial^\alpha f$ 代替.

定理 5 (6.1)的所有整体上属于 $L^{p,s}$ 的解,其中 $s=m+\frac{n}{p}+r,r>0,1<p<\infty$,在 Γ 之外是微局部地属于 $L^{p,s+r}$ 类的.

我们注意 Γ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 的锥形子集:若 $(x,\xi)\in\Gamma$,则对所有 $\lambda>0$ 事实上对所有 $\lambda\in\mathbb{R}$,亦有 $(x,\lambda\xi)\in\Gamma$. 我们考虑一个点 $(x_0,\xi_0)\notin\Gamma,\xi_0\neq0$,并构造函数 $u(x),\nu(\xi)$,它们跟引理 9 的推论 2 中的类似,使得 $u(x),v(\xi)$ 的支集与 Γ 不相交. 定理 5 的结论意味着算子 $u(x)v(D)$ 把 f 变换成一个属于 $L^{p,s+r}$ 的函数.

为证明定理 5,首先利用定理 3. 我们得等式(对所有函数 $f\in L^{p,s}$ 都满足)

$$F(x,f(x),\cdots,\partial^{\alpha}f(x),\cdots)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}L_{\alpha}(\partial^{\alpha}f)(x)+g(x),\tag{6.4}$$

其中 $g\in L^{p,s+r}$,而 $L_{\alpha}(f)=\pi(C_{\alpha}(x),f)$.

若 f 是(6.1)的解,那么

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}L_{\alpha}(\partial^{\alpha}f)=-g.\tag{6.5}$$

我们要借助定理 4 研究这个线性方程. 令 $L=\sum_{|\alpha|\leqslant m}L_{\alpha}\partial^{\alpha}(1-\Delta)^{-m/2}$. 由于在仿积定义中进行的变换,这个算子属于 OpB_r. L 的象征是

$$\lambda(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{j\geqslant s}S_{j-5}(C_{\alpha})(x)\psi(2^{-j}\xi)(i\xi)^{\alpha}\times(1+|\xi|^2)^{-m/2},\tag{6.6}$$

假定 (x_0,ξ_0) 不属于 $\Gamma,\xi_0\neq0$,我们来证明

$$\liminf_{t\to+\infty}|\lambda(x_0,t\xi_0)|>0.\tag{6.7}$$

我们注意若 $|\xi|\geqslant2^N,\sum_{N}^{\infty}\psi(2^{-j}\xi)=1-\varphi(2^{-N}\xi)=1$. 又由于 $C_{\alpha}(x)\in C^r,|S_j(C_{\alpha}(x))-C_{\alpha}(x)|\leqslant C2^{-jr}$. 这个性质引伸出,当 ξ

$\neq 0$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{j\geq 5} S_{j-5}(C_\alpha(x))\psi(2^{-j}t\xi) = C_\alpha(x). \qquad (6.8)$$

终得，若 $\xi\neq 0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda(x,t\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} C_\alpha(x)(i\xi)^\alpha\ |\xi|^{-m}$，那么(6.7)从(6.2)给的 Γ 的定义得到.

这些注释作好以后，回到(6.5)，我们把它写成 $L(h) = -g$，其中 $h = (1-\Delta)^{m/2}f$. 定理 4 的推论提供 $u(x)v(D)h\in L^{p,s+r-m}$，终有 $u(x)v(D)f\in L^{p,s+r}$，此即所述结论.

当正则性按 Hölder 空间的尺度度量时，类似的推理提供定理 5 的类似结果.

7. 仿积和小波

我们将考虑线性算子 T_a，它使仿积 $\pi(a,f)$ 对应一个函数或一个分布，假定 $a\in C^r(\mathbb{R}^n)$，$0<r<1$. 我们将这样结束本书，即作为 T_a 的一个实现 $\widetilde{T}_a$ 的固有函数，我们重新发现小波；这里 $\widetilde{T}_a - T_a$ 属于 $OpS^{-r}_{1,1}$.

更精确地说，把第 3 章第 2 节的来自多分辨率分析的小波记作 ψ_λ，$\lambda\in\Lambda$. 我们有 $\Lambda = \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda_j$，其中 $\Lambda_j = 2^{-j-1}\mathbb{Z}^n\backslash 2^{-j}\mathbb{Z}^n$. 事实上我们仅利用 $j\geq 0$，这导致用由 $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$，$k\in\mathbb{Z}^n$，定义的序列 φ_k，$k\in\mathbb{Z}^n$，补充标准正交系 ψ_λ，$\lambda\in\Lambda_j$，$j\geq 0$.

若 $a(x)$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个有界连续函数，我们如下定义算子 $\widetilde{T}_a$：$L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$，

$$\widetilde{T}_a(\psi_\lambda) = a(\lambda)\psi_\lambda, \lambda\in\Lambda_j, j\in\mathbb{N}, \qquad (7.1)$$

以及

$$\widetilde{T}_a(\varphi_k) = a(k)\varphi_k. \qquad (7.2)$$

这些算子 $\widetilde{T}_a$ 的集是 $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ 的一个变换和自伴的子代数. 算子范数 $\|\widetilde{T}_a\|$ 确好是 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}|a(\lambda)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|a(x)| = \|a\|_\infty$，

因而所有算子 $\widetilde{T}_a$ 组成的代数是一个 Banach 代数.

定理 6 若 $a(x)$ 属于 $C^r(\mathbb{R}^n)$,而 $0<r<1$,则 $\widetilde{T}_a - T_a$ 属于 $OpS^{-r}_{1,1}$.

定理 6 证明的关键在于首先把 T_a 和如下定义的 $\mathscr{T}$ 加以比较

$$\mathscr{T}_a(f) = \sum_0^\infty E_j(a)D_j(f), \tag{7.3}$$

其中,沿用第 2 章的记号,算子 E_j 和 D_j 相应于 Littlewood-Paley 的多分辨率分析. 但为实施这一比较,尚需算子 T_a 的另一种变体.

我们注意到如果代替 Littlewood-Paley 的多分辨率分析,我们利用这样一种多分辨率分析,对它来说,E_j 是相应于一个二进鞅的条件期望算子,那么 $\mathscr{T}_a$ 将是一个鞅变换.

仿积的这一修改不附加条件 $r<1$,当企图把函数 $E_j(a)$ 换成它在关于 $2^{-j}\mathbb{Z}^n$ 上的取样时这一点就要起作用.

甚至在把 T_a 跟 $\mathscr{T}_a$ 比较之前,我们应当进行第一个变换. 用 u 和 v 表示属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的两个函数,它们的 Fourier 变换 $\hat{u}(\xi)$ 和 $\hat{v}(\xi)$ 满足下列条件:在 O 的邻域内 $\hat{u}(\xi)=\hat{v}(\xi)=1$,而当 $|\xi|$ 充分大时 $\hat{u}(\xi)=\hat{v}(\xi)=0$. 再令 $u_j(x)=2^{nj}u(2^jx)$,并用 U_j 表示由 u_j 定义的卷积算子. 同样定义 v_j 和 V_j.

对于仿积定义的第一个修改在于把它定义为

$$\widetilde{\pi}(a,f) = \sum_0^\infty U_j(a)(V_{j+1}(f) - V_j(f)). \tag{7.3$'$}$$

为了比较 $\widetilde{\pi}$ 和"真正的"仿积,作算子 $R_a(f) = \widetilde{\pi}(a,f) - \pi(a,f)$,并来证明

$$R_a \in OpS^{-r}_{1,1}, \quad 若\ a\in C^r. \tag{7.4}$$

用 ρ 表示差 v-φ. ρ 的 Fourier 变换是紧支集的,并且在 O 的邻域内是零. 用 R_j 表示由 $2^{nj}\rho(2^jx)$ 定义的卷积算子,我们注意到 $\sum\limits_3^\infty$

$\Delta_{j-3}(a)R_j(f)$ 是一个误差项. 事实上，这个算子的象征是 $\sum_3^\infty \Delta_{j-3}(a)\hat{\rho}(2^{-j}\xi)$；由于 $\|\Delta_j(a)\|_\infty \leqslant C\ 2^{-jr}$，这个象征属于 $S_{1,1}^{-r}$.

今令 $\pi_1(a,f) = \sum_2^\infty S_{j-2}(V_{j+1}(f) - V_j(f))$，我们来验证，以其象征属于 $S_{1,1}^{-r}$ 的算子为模，π_1 和 π 一致. 它们的差正是 $\sum S_{j-2}(a)(R_{j+1}(f) - R_j(f))$，可用 Abel 变换处理这个级数. 以一个平凡的算子为模，我们得到 $-\sum_3^\infty \Delta_{j-3}(a)R_j(f)$.

然后还要更容易地比较 $\pi_1(a,f)$ 和 $\tilde{\pi}(a,f)$，它们的差属于 $Op\ S_{1,1}^{-r}$.

现回到小波和第 2 章的命题 9. 为稍许简化记号，我们限于一维情形. 沿用第 2 章的记号，我们有

$$E_j = S_j + R_j^+ + R_j^-, \tag{7.5}$$

其中 S_j 是由 $2^j\theta(2^jx)$ 定义的卷积算子，而 $\hat{\theta}(\xi) = (\hat{\varphi}(\xi))^2 = 1$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上，$= 0$ 若 $|\xi| \geqslant \frac{4\pi}{3}$. 算子 R_j^+ 和 R_j^- 有形式 M_jN_j，这里 N_j 是由 $2^j\eta(2^jx)$ 或 $2^j\zeta(2^jx)$ 定义的一个卷积算子；η 和 ζ 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，它们的 Fourier 变换在 0 的邻域内是零并且有紧支集. 而 M_j 是由 $\exp(\pm 2\pi i 2^jx)$ 定义的逐点乘法算子. 采用这些记号，我们有

引理 12 若 $a(x)$ 属于 $C^r(\mathbb{R}^n)$，仿积 $\pi(a,f)$ 以一个属于 $O\ p\ S_{1,1}^{-r}$ 的算子为模可定义为 $\sum_0^\infty E_j(a)D_j(f)$.

这里把 $E_j(a)$ 换成(7.5) 的主要项，即 $S_j(a)$. 至于误差项，由于 $a(x)$ 属于 C^r，我们有 $\|R_j^\pm(a)\|_\infty \leqslant C2^{-jr}$. $R_j^\pm(a)$ 的导数依靠 S. Bernstein 公式来估计.

这样我们就归结到$\sum_{0}^{\infty} S_j(a)D_j(f)$. 今有 $D_j = E_{j+1} - E_j = S_{j+1} - S_j + R_{j+1}^{+} - R_j^{+} + R_{j+1}^{-} - R_j^{-}$. 主项是 $\sum_{0}^{\infty} S_j(a)(S_{j+1} - S_j)(f)$，即一种形式的 $\tilde{\pi}(a,f)$. 两个误差项依靠 Abel 变换处理.

由引理 12 提供的仿积的变体记作$\sqcap(a,f)$，我们有

$$\sqcap(a,\psi_\lambda) = E_j(a)\psi_\lambda \qquad 若\ \lambda \in \Lambda_j, j \in \mathbb{N}, \tag{7.6}$$

以及

$$\sqcap(a,\varphi_k) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{7.7}$$

我们记 $a_j(x) = E_j(a)(x)$，并在以下假定 $0 < r < 1$. 用$\tilde{\sqcap}_a$表示在小波基内如下定义的对角算子：$\tilde{\sqcap}_a(\psi_\lambda) = a_j(\lambda)\psi_\lambda$，若 $\lambda \in \Lambda_j$，$\tilde{\sqcap}_a(\varphi_k) = 0$，若 $k \in \mathbb{Z}$. 则有$\sqcap(a,\psi_\lambda) - \tilde{\sqcap}_a(\psi_\lambda) = (a_j(x) - a_j(\lambda))\psi_\lambda(x) = q_{j,k}(2^j x)\psi_\lambda(x)$. 由于 $a(x)$ 属于C^r，我们有 $|q_{j,k}(u)| \leqslant C\,2^{-jr}|u - (k + 1/2)|^r$，而由于 $0 < r < 1$，遂有，对所有整数 $l \geqslant 1$，

$$\left|\left(\frac{d}{du}\right)^l q_{j,k}(u)\right| \leqslant C_l\,2^{-rj}. \tag{7.8}$$

差 $\sqcap(a,\cdot) - \tilde{\sqcap}_a$ 的象征是 $\sum_{0}^{\infty} \gamma_j(2^j x, 2^{-j}\xi)\,\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\xi)$，其中

$$\gamma_j(u,v) = \sum_{-\infty<k<\infty} q_{j,k}(u)\psi(u-k)^{-i(u-k)v}, \tag{7.9}$$

不难验证 $\left|\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^l\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^m \gamma_j(u,v)\right| \leqslant C(l,m)2^{-rj}$，并由此得到$\sqcap(a,\cdot) - \tilde{\sqcap}_a \in Op\,S_{1,1}^{-r}$.

要作的最后一个修改是把 $a_j(\lambda)$ 换为 $a(\lambda)$，由于 $\|a - a_j\|_\infty \leqslant C\,2^{-rj}$，这种修改的验证是直接的.

若 $m \leqslant r < m+1$，宜于如下定义定理 6 的算子 $\tilde{T}_a$

$\tilde{T}_a^{(m)}(\psi_\lambda)(x) = \left(a(\lambda) + \cdots + \frac{(x-\lambda)^m}{m!}a^{(m)}(\lambda)\right)\psi_\lambda(x)$，同样证明 $T_a - \tilde{T}_a^{(m)} \in Op\,S_{1,1}^{-r}$.

参考文献

1. L. Ahlfors, Zur theorie der Uberlagerungsflaschen, Acta Math., **65**, (1935), 157-194.
2. J. Arsac, Transformation de Fourier et théorie des distributions, Dunod, (1961).
3. P. Auscher, Wavelets on chord-arc curves, to be published in ≪Ondelettes, Méthodes Temps-Fréquence et Espaces des phases≫, J. M. Combes, A. Grossmann and P. Tchamitchian editors, C. P. T., C. N. R. S.-Luminy, Case 907, 13288-Marseille-Cedex 9.
4. J. P. Aubin, Approximation of Elliptic boundary-value problems, Pure and. Applied Mathematics, Krieger Publishing Co., Huntington, N. Y., (1980).
5. A. Baernstein II and E. T. Sawyer, Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbf{R}^n)$, Memoirs of the A. M. S., **53**, (1985).
6. R. Balian, Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique qantique C. R. Acad. Sci. Paris, t. 292, Série II, 1357-1361, (1981).
7. E. Balslev, A. Grossmann and T. Paul, A characterization of dilation analytic operators, Annales I. H. P., Physique théorique, **45**, (1986).
8. G. Battle, A block spin construction of ondelettes, Part I: Lomarié functions, Comm. Math. Phys., **110**, 601-615, (1987).
9. G. Battle, A block spin construction of ondelettes, Part II: the QFT connection, Comm. Math. Phys., **114**, 93-102, (1988).
10. G. Battle and P. Federbush, Ondelettes and phase cluster expansion, a vindication., Comm. Math. Phys., **109**, 417-419, (1987)
11. R. Beals, Characterization of pseudo-differential operators and applications, Duke Math. J., **44**, (1977), 45-57.
12. A. Benedek, A. Calderon and R. Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **48**, (1962), 356-365.
13. E. Berkson, On the structure of the graph of the Franklin analyzing wavelet, Proc. of the special year in modern analysis, (Urbana 1986-1987), to be published by Cambridge University **Press**, (1989).
14. O. V. Besov, Théorèmes de plongement des espaces fonctionnels, Congrès int. des math., Nice, (1970), Vol I, 467-473.
15. A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebras,

Ann. Inst. Fourier **14**, (1962), 1-32.

16. J. M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularltēs pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Scient. E. N. S. , **14**, (1981), 209-246.
17. J. M. Bony, Propagation et interacction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (1983), Warszawa, 1133-1147.
18. J. M. Bony, Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Sém. E. D. P. , 1979/80, n° 22, 1981/82, n° 2 et 1983/84, n° Centre de Mathématique, Ecole Plytechnique, 91128-Palaiseau, France.
19. G. Boole, On the comparison of transcendents with certain applications to the theory of definite integrals, Philosophical transactions of the Royal Society. **147**, (1857), 745-803.
20. S. V. Botchkariev, Existence of bases in the space of analytic functions and some properties of the Franklin system, Mat. Sbornik. , **98**, (1974), 3-18.
21. G. Bourdaud-Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers, Université Paris VII, Mathématique, tour 45-55, 5ēme étage, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
22. G. Bourdaud, Réalisations des Espaces de Besov homogènes, A paraître aux Arkiv f. Math. (1988).
23. G. Bourdaud, Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes, manuscripta math. , **60**, (1988), 93-103.
24. J. Bourgain, On the L^p-bounds for maximal functions associated to convex bodies, Israel J. Math. **54**, (1986). 307-316.
25. J. Bourgain, Geometry of Banach spaces and Harmonic Analysis, Proc. Int. Congress Math. , Berkeley, C. , (1986), 871-878.
26. J. Bourgain. Extension of a result of Benedek, Calderon and Panzone, Ark. for Mat. , **22**, (1984), 91-95.
27. J. Bourgain, Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, (preprint).
28. J. Bourgain, On square functions on the trigonometric system, (preprint).
29. J. Bourgain, Vector-valued singular integrals and the H^1-BMO duality, Probability theory and harmonic analysis, J. A. Chao and W. A. Woyczynski, editors, Marcel Dekker, (1986), New York, 1-19.
30. D. L. Burkholder, A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach space valued functions, Conference in

Harmonic Analysis in Honor of Zygmund, (1982), The University of Chicago.

31. D. L. Burkholder, Martingale theory and harmonic analysis in euclidean spaces, Proc. Symp. Pure Math., Part 2, (1979), 283-301.
32. D. L. Burkholder, Martingales and Fourier analysis in Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, **1206**, (1986). 61-108.
33. D. Burkholder, A geometrical characterization of BAnach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, The Annals of Probability, Vol. 9, 6, (1981). 997-1011.
34. D. Burkholder, R. Gundy and M. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. A. M. S., **157**, (1971), 137-153.
35. A. P. Calderon, Intermediate spaces and interpolation, the complex method Studia Math., **24**, (1964), 113-190.
36. A. P. Calderon, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Journ. Math., **80**, (1958), 16-36.
37. A. P. Caleron, Algebra of singular integral operators, Proc. of Symp. in Pure Mathematics, X, A. M. S. (1967).
38. A. P. Calderon, Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators-Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **74**, (1977), 1324-1327.
39. A. P. Calderon, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, (1978), 85-96.
40. A. P. Calderon, Boundary value problems for the Laplace equation in Lipschitzian domains, Recent progress in Fourier analysis, North-Holland Mathematics Studies, **111**, (1983), 33-49, edited by I. Peral and J. L. Rubio de Francia.
41. A. P. Calderon and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Adv. in Math., **16**, (1975), 1-63 and **24**, (1977), 101-171.
42. A. P. Calderon and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, Acta Math., Vol. **88**, (1952), 85-139.
43. A. P. Calderon and A. Zygmund, Singular integrals and periodic functions, Studia Math., **14**, (1954), 249-271.
44. A. P. Calderon and A. Zygmund, On Singular integrals, Amer. Journ, Math., **78**, (19556), 289-309 and 310-320.
45. A. P. Calderon and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math. Soc., **84**, (1957), 901-921.
46. L. Carleson, An explicit unconditional basis in H^1, Bull. des Sciences Math., **104**, (1980), 405-416.

47. L. Carleson, Interpolation of bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math. **76**, (1962), 547-559.
48. L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Analyse Harmonique, Orsay, (1975), Preprint $n°$ 164.
49. A. Chang, Two remarks about H^1 and BMO on the bidisc, Conference on harmonic analysis in Honor of Antoni Zygmund, The University of Chicago, March 23-28, 1981.
50. A. Chang and Z. Ciesielski, Spline characterizations of H^1, Studia Math., **75**, (1983), 183-192.
51. S. Y. Chang and R. Fefferman, A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc, Ann. of Math. **112**, (1980), 179-201.
52. M. Christ, Weighted norm inequalities and Schur's lemma, Studia Math., LXXVIII, (1984), 309-319.
53. M. Christ and J. L. Journé, Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators, Acta Math., **159**, (1987), 51-80.
54. M. Christ and J. L. Rubio de Francia, Weak type(1,1)bounds for rough operators, Iny. Math., **93**, (1988), 225-237.
55. Z. Ciesielski, Properties of the orthonormal Franklin system, Studia Math, **23**, (1963), 141-157, and Studia Math. **27**, (1966), 289-323.
56. Z. Ciesielski, Bases and approximation by splines, Proc, Int. Congress of Math., Vancouver, (1974), Vol. Ⅱ, 47-51.
57. Z. Ciesielski, Haar orthogonal functions in analysis and probability, Alfred Haar Memorial Conference, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, (1985), Budapest, 25-56.
58. Z. Ciesielski and T. Figiel, Spline approximation and Besov spaces on compact manifolds, Studia Math. LXXV, (1982), 13-36.
59. Z. Ciesielski and T. Figiel, Spline bases in classical function spaces on compact manifolds, Studia Math., LXXVI, (1983), 95-136.
60. R. R. Coifman, A real variable characterization of H^p, Studia Math., **51**, (1974), 269-274.
61. R. R. Coifman, G. David et Y. Meyer, La solution des conjectures de Calderon, Advances in Mathematics, **48**, (1983), 144-148.
62. R. R. Coifman-D. G. Deng-Y. Meyer-Domaine de la racine carrée de certains opérateurs différentiels accrétifs. Ann. Inst. Fourier, **33**, 2, (1983), 123-134.
63. R. Coifman and C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximsl functions and singular integrals, Studia Math., **54**, (1974), 241-250.
64. R. Coifman, P. W. Jones and S. Sommes, Two elementary proofs of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz curves, preprint,

Dept. of Math., Yale University, New Haven, CT 06520, U.S.A.

65. R. R. Coifman-A. McIntosh-Y. Meyer L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur les courbes Lipschitziennes-Ann. of Math., **116**, (1982) 361-387.
66. R. R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, The Hilbert transform on Lipschitz curves, Miniconference on partial differential equations (Canberra, July 9-10, 1981), edited by P. F. Price, L. M. Simon and N. S. Trudinger.
67. R. R. Coifman and Y. Meyer, Lavrentiev curves and conformal mappings, Institut Mittag-Leffler, Report No. 5, 1983.
68. R. R. Coifman, Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque **57**, Soc. Math. France (1978).
69. R. R. Coifman, Y. Meyer, Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderon's theorem and analysis on Lipschitz curves, Lecture Notes in Mathematics, **779**, (1979), 109-122.
70. R. R. Coifman, Y. Meyer, Non-linear Harmonic Analysis, Operator theory and P. D. E., Beijing Lectures in Harmonic Analysis, edited by E. M. Stein, Annals of Mathematics Studies, **112**, (1986).
71. R. Coifman, Y. Meyer and E. Stein, Some new function spaces and their applications to harmonic analysis, Jour. of Funct. Anal., **62**, (1985), 304-335.
72. R. Coifman, Y. Meyer et E. Stein, Un nouvel espace fonctionnel adapté à i'étude des opérateuus définis par des intégrales singulières, Harmonic analysis, Cortona 1982, Lecture Notes in Math., **992**, Springer-Verlag.
73. R. Coifman, R. Rochberg and al., The Molecular characterization of certain Hardy spacces, Asterisque **77**, Société mathématique de France, (1980).
74. R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in séveral complex variables, Ann. of Math., **103**, (1976), 611-635.
75. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. A. M. S., **83**, (1977), 569-645.
76. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, Lecture Notes in Mathematics, **242**, Springer-Verlag.
77. R. Coifman and G. Weiss, Transference methods in analysis, Regional conference series in mathematics, n° 31, A. M. S.
78. A. Cordoba, Maximal functions, covering lemmas and Fourier multipliers, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XXXV, Part.

I, 29-50.

79. A. Cordoba and R. Fefferman, A geometric proof of the strong maximal theorem, Annals of Math. **102**, (1975).
80. M. Cowling. Harmonic analysis on semigroups, Ann. of Math. **117**, (1983), 267-283.
81. B. Dahlberg, Estimates of harmonic measure, Arch. for Rat. Mech. and Anal., **65**, (1977), 275-288.
82. B. Dahlberg, Real analysis and potential theory, Proceedings of the International Congress of Math., Varsovie, (1983), Vol. 2, 953-959.
83. B. Dahlberg, Poisson semigroups and singular integrals, Proc; Amer. Math. Soc., 97, (1986), 41-48.
84. B. Dahlbergg, D. Jerison and C. Kenig, Area integral estimates for elliptic differential operators with non-smooth coefficients, Arkiv f. Math., **22**, (1984), 97-108.
85. B. Dahlberg and C. Kenig, The L^p Neumann problem for Laplace's equation on Lipschitz domains, Annals of Math., **125**, (1987), 437-465.
86. B. Dahlberg, C. Kenig and G. Verchota, The Dirichlet problem for the bi-Laplacian on Lipschitz domains, Annales de l'institut Fourier de Grenoble, **36**, (1986), 109-135.
87. I. Daubechies, The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, AT&T Bell Laboratories, 600 Mountain Avenue, Murray Hill, N.J., 07974, U.S.A.
88. I. Daubechies, Orthonormal basis of compactly supported wavelets, AT&T Bell Labs., Murray Hill.
89. I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthonormal expansions, J. Math. Phys., 27, 5, May 1986, 1271-1283.
90. I. Daubechies and T. Paul, Wavelets and applications, Proceedings of the VIII/International Congress on Mathematical Physics, M. Mebkhout and R. Seneor, editors, World Scientific Publishers, 1987.
91. I. Daubechies, J. R. Klauder and T. Paul, Wiener measures for path integrals with affine kinematics variables, Jour. of Math. Physics, **28**, (1987), 85-102.
92. G. David, Opérateurs de Calderon-Zygmund, Proc. Int. Cong. Math., Berkeley, Ca., (1986), 890-899.
93. G. David, Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, Ann. Sci. E. N. S., **17**, (1984), 157-189.
94. G. David, A lower estimate for the norm of the Cauchy integral operator on Lipschitz curves (preprint).
95. G. David, Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières,

4ème série, tome 21, 1988, 225-258.

96. G. David and J. L. Journé, A boundedness criterion for generalized Calderon-Zygmund operators, Ann. of Math., **120**, (1984), 371-397.

97. G. David, J. L. Journé et S. Semmes, Opérateurs de Calderon-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation, Revista Matematica Ibero Americana, Vol. I, 4, (1985), 1-56.

98. G. David, J. L. Journé and S. Semmes, Calderon-Zygmund operators, para-accretive functions, and interpolation, preprint, (Thèse, Centre de Mathématique, Ecole Plytechnique et Dept. of Math., Yale, USA).

99. G. David and S. Semmes, L'opérateur défini par v. p. $\int |(A(x)-A(y))/(x-y)|(x-y)^{-1}f(y)dy$ est borné sur $L^2(R)$ lorsque A est lipschitzienne, C. R. A. S., tome 303, Série I, **11**, (1986), 499-502.

100. G. Deslauriers et S. Dubuc, Interpolation dyadique, dans ≪Fractals, dimensions non entières et applications≫, publié par G. Cherbit, Masson, (1987).

101. S. Dubuc, Interpolation through an iterative scheme, J. of Math. Anal. and Appl., **114**, 1,(1986), 185-204.

102. J. Duoandikoetxea and J. L. Rubio de Francia, Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimate, Invent. Math., **84**, (1986), 541-561.

103. P. Duren, Theory of H^p spaces, Academic press, (1970).

104. E. Fabes, M. Jodeit and N. Rivière, Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains, Acta Math. **141**, (1978), 165-186.

105. E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig, Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations, Proc, Nat. Acad. Sci., U. S. A., Vol. 79, (1982), 5746-5750.

106. E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig, Multilinear squate functions and partial differential equations, Amer. Jor. of Math., **107**, (1985), 1325-1367.

107. P. Federbush, Quantum field theory in ninety minutes, Bull. Amer. Math. Soc., July 1987.

108. C. Fefferman, Recent progress in classical Fourier analysis, Proc. of the I. C. M., Vancouver (1974), tome I, 95-118.

109. C. Fefferman and E. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., **129**, (1972) 137-193.

110. R. Fefferman, Multiparameter Fourier analysis, Beijing Lectures in Harmonic analysis, edited by E. Stein, Annals of Math. Studies, Princeton University Press **112**, (1986), 47-130.

111. R. Fefferman, Functions of bounded mean oscillation on the bi-disc, Annals of Math. , **10**, (1979).
112. R. Fefferman, Calderon-Zygmund theory for product domains H^p spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 83, (1986), 840-843.
113. M. Frazier and B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, Indiana University Math. J. , **34**, (1985), 777-799.
114. M. Frazier and B. Jawerth, The-transform and decomposition of distribution, Proc. Conf. ≪Function Spaces and Applications≫, Lund 1986, Lect. Notes Math. , Springer-Verlag.
115. J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics, North Holland Math. Studies, Elsevier Science Publishers B. V. , Amsterdam, (1985).
116. J. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, (1981).
117. J. Garnett, Corona problems, interpolation problems and inhomogeneous Cauchy-Riemann equations, Proc; Int. Cong. Math. , Berkeley, Ca. , (1986).
118. J. E. Gilbert, Nikishin-Stein theory and factorization with applications, Proc. of Symp. in Pure Math. , Vol. XXXV, Part 2, (1979), 233-267.
119. G. Giraud, Equations à intégrales principales, Ann. Scient. E. N. S. , (1934) 251-373.
120. J. Glimm and A. Jaffe, Quantum physics, a functional integral point of view, Springer-Verlag, New York, (1981).
121. P. Goupillaud, A. Grossmann and J. Morlet, Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, Geoexploration, **23**, (1984/1985), 85-102, Elsevier Science Publishers, B. V. Amsterdam.
122. K. Grochenig, Analyse multiéchelle et bases d'ondelettes, CRAS Paris, Série I, (1987), 13-17.
123. A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet and J. Morlet, Detection of abrupt changes in sound signals with the help of the wavelet transform, Preprint, Centre de Physique théorique, C. N. R. S. Luminy Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France.
124. A. Grossmann and J. Morlet, Decompositions of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, SIAM Journal Math. Anal. **15**, (1984), 723-736.
125. A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, Integral transforms associated to square integrable representations I. J. Math. Phys, **26**(1985),2473-2479 and **I** Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théorique, Vol. **45**, (1986), 293-309.
126. M. De Guzman, Differentiatioin of integrals in $\mathbb{R}^n$, Letcure Notes in

Math. 481.

127. M. De Guzman, Real variable methods in Fourier analysis, Notas de Matematica, North-Holland Math. Studies, **46**.

128. A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. **69**, (1910), 331-371.

129. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function theoric applications, Acta Math., **54**, (1930), 81-116.

130. H. Helson, Harmonic analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

131. M. Holschneider, On the wavelet transformation of fractals objecs, J. of statistical physics, **50**, (1988), 963-993.

132. M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Modlet et ph. Tchamitchian, L'algorithme à trous, to be published in 《Ondelettes, Mé thodes Temps-fré quence et Espaces de Phases, editors J. M. Combes, A. Grossmann et P. Tchamitchian, C. P. T., CNRS-Luminy Case 907, 13288-Marseille-Cedex 9.

133. L. Hormander, The analysis of linear partial differential equations, Vols I, II et III, Springer-Verlag, New york, (1983-1985).

134. S. Jaffard et Y. Meyer, Bases d'ondelettes dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$, à paraître au journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

135. S. Janson, communication orale, Congrés d'analyse de Fourier, El Escorial, Juin 1987 (à paraître aux LN, Springer-Verlag).

136. D. Jerison and C. Kenig, An identity with applications to harmonic measure, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 2, (1980), 447-451.

137. D. Jerison and C. Kenig, The Dirichlet problem in non-smooth domains, Annals of Math., **113**(1981), 367-382.

138. D. Jerison and C. Kenig, Boundary value problems on Lipschitz domains, Bull. MAA Studies in Math., 23, Studies in Partial differential equations, W. Littman editor, (1982), 1-68.

139. D. Jerison and C. Kenig, The Neumann problem on Lipschitz domains, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. **4**, (1981), 203-207.

140. F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. **18**, (1965), 415-426.

141. R. Johnson, Application of Carleson measures to partial differential equations and Fourier multiplier problems, Harmonic Analysis, Cortona 1982, Lecture, Notes in Math. **992**, Springer-Verlag.

142. P. W. Jones, Some topics in the theory of Hardy spaces, Toopics in modern harmonic analysis, Proceedings of a seminar held in Torino, May-June 1982, Istituto Nazionale di alta matematica Francesco Severi, Vol.

I, 551-569.
143. P. W. Jones, Recent advances in the theory of Hardy spaces, Proc. Int. Congr. Math., varsovie, (1983), 829-838.
144. P. W. Jones, Fourier Analysis, EI Escorial, Juin 1987, to be published in Springer-Verlag Lecture Notes.
145. P. W. Jones et M. Zinsmeister, Sur la transformation conforme desdomaines de Lavrentiev, CRAS Paris, Série I, t, 295, (1982), 563-566.
146. J. L. Journé, Calderon-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderon, L. N., **994**, (1983), Springer-Verlag.
147. J. L. Journé, Calderon-Zygmund operators on product spaces, Revista Mathematica Iberoamericana, **1**, (1985), 55-91.
148. J. P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Ergebnisse der Math., 50, Springer-Verlag, (1970).
149. J. P. Kahane, Some random series of functions, Cambridge studies in advanced mathematics, **5**, (1968).
150. J. P. Kahane, Y. Katznelson et K. de Leeuw, Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues, CRAS Paris, t. 285, 1001-1003.
151. T. Kato, Perturbation Theory for linear operators, Springer-Verlag, N. Y., (1966).
152. T. Kato, Scattering theory, MAA studies in Math., Vol. 7, edited by A. H. Taub, (1971), 90-115.
153. T. Kato and G. Ponce, On the Euler and Navier-Sokes equations in Lebesgue spaces $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, preprint,, Dept. of Math., Univ. of California, Berkeley, California, 94720.
154. Y. Katznelson, An introduction to Fourier analysis, John wiley & Sons, New, York, 1968.
155. M. V. Keldysh et M. A. Lavrentiev, Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables., Ann. Sci., ENS., **54**, (1973), 1-38.
156. C. Kenig, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, Proc. Symp. Pure Math., Vol. **34**, (1979), 263-274.
157. C. Kenig, Weighted H^p spaces on Lipschitz domains, Amer. Jour. of Math. **102**, (1980), 129-163.
158. C. Kenig, Recent progress on boundary-value problems on Lipschitz domains, Proc. Symp. Pure Math., Vol. **43**, (1985), 175-205.
159. C. Kenig, Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains, Beijing Lectures in Harmonic analysis, edited by E. Stein, Annals of Math. Studies **112**, Princeton University Press, (1986).

160. C. Kenig and Y. Meyer, The Cauchy integral on Lipschitz curves and the square root of second order accretive operators are the same, Recent progress in fourier analysis, Math. Studies **111**, (1985), 123-145, North Holland.

161. C. Kenig and P. Tomas, Maximal operators defined by Fourier multipliers, studia Math., **68**, (1980), 79-83.

162. P. Koosis, Introduction to H^p-spaces, London mathematical society lecture note series, Cambridge University Press.

163. R. H. Latter, A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms, Studia Math. **62**, (1978), 93-101.

164. P. G. Lemarié, Continuité sur les espaces de Besov des operateurs définis par des intégrales singulières, Ann; Inst; Fourier (Grenoble), **35**, (1985), 4, 175-187.

165. P. G. Lemarié, Bases d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés, á paraître au Bull. Soc. Math. France.

166. P. G. Lemarié, et Y. Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, Revista Matematica Iberoamericana, Vol. 2, (1986), 1-18.

167. J. S. Liénard, Speech analysis and reconstruction using short-time, elementary waveforms., LIMSI-CNRS, Orsay, France.

168. J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, Contributions to the theory of classical Banach spaces, J. Functional Analysis, **8**, (1971), 225-249.

169. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, New York, (1977).

170. J. Littlewood and R. Paley, Theorems on Fourier series and power series, Jour. London Math. Soc. **6**, (1931), 230-233.

171. J. Littlewood and R. Paley, Theorems on Fourier series and power series, Proc. London Math. Soc. (2), **42**, (1937), 52-89.

172. A. McIntosh, Square roots of elliptic operators, Centre for Math. Analysis, Australian National University, GPO Box 4, Canberra, ACT 2601, Australia.

173. A. McIntosh, Square roots of elliptic operators, J. of Functional Analysis, **61**, 3, (1985), 307-327.

174. A, McIntosh, Functions and derivation of C*-algebras, J. of Functio-nal Analysis, **30**, 2, (1978), 264-275.

175. A. McIntosh, Counterexample to a question on commutators, Proc. Amer. Math. Soc., **29**, (1971), 430-434.

176. A. McIntosh, On representing closed accretive sesquilinear forms as $(A^{1/2}u, A^{*1/2}v)$, Macquarie Mathematics Reports, August 1981.

177. A. McIntosh, Clifford algebras and the higher dimensional Cauchy inte-

gral, 《Approximation theory and function spaces》, Banach Center, Varsovie, Pologne, 1986.

178. S. Mallat, Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$, à paraître dans Trans. of the Amer. Math. Soc. (1989).

179. S. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition. the wavelet representation, à paraître dans IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Tech. Rep. MS-CIS-87-22, University of Pennsylvania, 1989.

180. S. Mallat, Dyadic wavelets energy zero-crossings, To appear as an invited paper in IEEE Trans. on Information Theory, Tech. Rep. MS-CIS-88-30, University of Pennsylvania, 1989.

181. S, Mallat, Multiresolution Representations and wavelets, Ph. D. in Electrical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA.

182. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, W. H. Freeman and Co. , New York, 1983.

183. J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Stud. Math. , VIII, (10939), 78-91.

184. B. Maurey, Isomorphismes entre espaces H^1, Acta Math. , **145**, (1980), 79-120.

185. B. Maurey, Le système de Haar, Séminaire Maurey-SSchwartz (1974/75), Ecole Polytechnique.

186. Y. Meyer, Wavelets and operators, Proc. special year in modern alalysis, Urbana 1986/87, to be published by Cambridge University Press, (1989).

187. Y. Meyer, Real analysis and operator theory, Proc. Symp. Pure Math. , **43**, (1985), 219-235.

188. Y. Meyer, Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, Cahiers Mathématiques de la Décision, *n*° 8703, Ceremade.

189. Y. Meyer, Intégrales singulières, opérateurs multilinéaires, analyse complexe et équations aux dérivées partielles, Proc. Intern. Cong. Math. (1983), Varsovie, 1001-11010.

190. Y. Meyer-Intégrales singulières, opérateurs multilinéaires et équations aux dérivées partieles, Seminaire Goulaouic-Schwatz, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématique, 91128-Palaiseau, France.

191. M. Meyer, Une classe d' espaces de type BMO. Applications aux intégrales singulières, à paraître à Ark. F. Math.

192. B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for classical operators, Proc. Symp. Pure Math. Vol. XXXV, Part I, 69-83.

193. T. Murai, Boundedness of singular integral operators of Calderon type (V and VI), Nagoya University preprint series (1984).
194. T. Murai, A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity, L. N. in Math., 1307, Springer-Verlag.
195. A. Nagel, N. Rivière and S, Wainger, On Hilbert transformations along curves, Bull. Amer. Math. Soc., **80**, (1974), 106-108.
196. A. Nagel, N. Rivière and S. Wainger, On Hilbert transforms along curves, Amer. Jour. Math., 98, (1976), 395-403.
197. J. Necas, Les méthodes directes en tréorie des équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.
198. R. O'Neil, G. Sampson and G. Soares de Souza, Several characterization of the special atom spaces with applications, Revista Matematica Ibero-Americana, Vol. 2, 3, (1986), 333-355.
199. T. Paul, Functions analytic on the half plane as quantum mechanic states, J. Math. Phys., **25**, (1984), 3252-3263.
200. T. Paul, Wavelets and path integrals, to be published in ≪Ondelettes, Méthodes temps-fréquence et espaces des phases≫, J. M. Combes, A. Grossmann et P. Tchamitchian, editors, C. P. T., C. N. R. S. —Luminy, Case 907, 13288-Marseille-Cedex 9.
201. J. Peetre, On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Ann. Math. Pura Appl., **72**, (1966), 295-304.
202. J. Peetre, New thoughts on Besov spaces, Duke Univ. Math. Dept., Durham, (1976).
203. D. H. Phong and E. M. Stein, Hilbert integrals, singular integrals and Radon transforms. Acta Math., **157**, (1985), 99-157.
204. G. Ponce, Propagation of $L^{q,k}$ smoothness for solutions of the Euler equation, preprint, Dept. of Math., University of Chicago, Chicago, Ⅲ., 60637.
205. F. Ricci and G. Weiss, A characterizaton of $H^1(\sum_{n-1})$, Proc. Symp. Pure Math., Vol. XXXV, Part. I, 289-294.
206. X. Rodet, Time-Domain Formant-Wave-Function Synthesis, Computer Music Journal, Vol. 8, 3, Fall 1985.
207. J. L. Rubio de Francia (VII. 58) A new technique in the theory of A_p weights, Topics in modern harmonic analysis, Proc. Sem. Torino-Milano, Vol. Ⅱ, 571-580.
208. J. L. Rubio de Francia, A Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals, Revista Matematica Ibero-Americana, 1, (1985), 2, 1-13.
209. W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience Publishers, John Wi-

ley & sons, New York, (1962).

210. C. Sadosky, Interpolation of operators and singular integrals, Marcel Dekker, (1979).

211. S. Saks and A. Zygmund, analytic Functions, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wroclaw, (1952).

212. S. W. Semmes, A criterion for the boundnedness of singular integrals on hypersurfaces, preprint, Dept. of Math., Yale, New Haven, 06520 C. T., U. S. A.

213. P. Sjolin and J. O. Stromberg, Spline systems as bases in Hardy spaces, Israel J. Math., **45**, (1983), 2-3, 147-156.

214. P. Sjolin and J. O. Stromberg, Basis properties of Hardy spaces, Ark. Mat., **21**, (1983), 111-125.

215. S. Spanne, Sur l'interpolation entre les espaces…,, ANN Scuola Norm. Pisa, **20**, (1966), 625-648.

216. D. A. Stegenga, Multipliers of the Dirichlet space, Illinois J. of Math., **24**, (1980), 113-139.

217. E. M. Sten, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, (1970).

218. E. M. Stein, Topics in harmonic analysis, Ann. of Math. Studies, **63**, Princeton University Press, (1970).

219. E. M. Stein, On limits of sequences of operators, Ann. of Math., **74**, (1961), 140-170.

220. E. M. Stein and S. Wainger, Problems in Harmonic Analysis related to curvature, Bull. Amer. Math. Soc., **84**, (1978), 1239-1295.

221. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean sqaces, Princeton University Press, (1971).

222. E. M. Stein and G. Weiss, On the theory ot H^p spaces, Acta Math. **103**, (1960), 25-62.

223. J. O. Stromberg. A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbf{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces, Conference in Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Vol. Ⅱ, 475-493, edited by W. beckner and al., Wadsworth math. series.

224. J. O. Stromgberg, Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces, Indiana Univ. Math. J., **28**, (1979), 511-544.

225. J. O. Stromberg and A. Torchinsky, Weights, sharp ,maximal function and Hardy spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **3**, (1980) 1053-1056.

226. T. Takagi, A simple example of a continuous function without derivative, The collected papers of Teiji Takagi, Iwanami Shoten Pub., (1973), 5-6, (Ⅱ. 78)

227. P. Tchamitchian, Calcul symbolique surles opérateurs de Calderon-zygmund et bases inconditionnelles de $L^2(\mathbf{R})$, CRAS Paris, **303**, (1986), 215-218.

228. P. Tchamitchian, Ondelettes adaptées à l'analyse complexe, preprint.

229. E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford at the Clarendon Press, (1937).

230. H. Triebel, Theory of function spaces, Monographs in Mathematics, Vol. 78, Birkhauser Verlag, Basel (1983).

231. A. Uchiyama, A constructive proof of the Fefferman-Stein decomposition for BMO(R^n), Acta Math., **148**, (1982), 215-241.

232. G. Verchota, Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains, Jour. of Funct. Anal., **59**, 572-611.

233. S. Wainger, On some aspects of differentiation theory, Topics in modern harmonic analysis, Proc. Sem. Torino-Milano, May-June 1982, Istituto Nazionale di alta matematica Francesco Severi, Vol. I. 667-700.

234. S. Wainger, Averages and singular integrals over lower dimensional sets, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, edited by E. Stein, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, **112**, (1986).

235. J. M. Wilson, A simple proof of the atomic decomposition for $H^p(R^n)$, Studia Math., **74**, (1982), 25-33.

236. J. M. Wilson, On the atomic decomposition for Hardy spaces (preprint).

237. P. Wojtaszczyk, The Franklin system is an unconditional basis in $\mathbf{H}^1$, Ark. Mat. **20** (1982), 293-300.

238. M. Zinsmeister, Domaines de Lavrentiev, Publications Mathématiques d'Orsay, (1986), $n°$ 204.

239. A. Zygmund, Trigonometric Series, second edition, Cambridge University press, (1968).

符　号　表

$\mathbb{N}$	全体正整数
$\mathbb{Z}$	全体整数
$\mathbb{Z}^n$	全体 n 维整数格点
$\mathbb{R}$	全体实数
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$\to$	对应到
$\hat{\varphi}$	函数或分布的 Fourier 变换
$\Leftrightarrow$	等价于

索　　引

一画

二画

三画

四画

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

以西文开头的名词